Université Paris-Saclay
LDD Maths-Physique
M.Léautaud, S.Nonnenmacher

TD3 – Champs de vecteurs, divergence

Exercice 1.

1. Soit $M \in M_d(\mathbb{R})$, et φ la forme $d-$linéaire définie par
$$\varphi(x_1, \cdots, x_d) = \sum_{i=1}^{d} \det(x_1, \cdots, x_{i-1}, Mx_i, x_{i+1}, \cdots, x_d).$$
Montrer $\varphi(x_1, \cdots, x_d) = \operatorname{Tr} M \det(x_1, \cdots, x_d), \forall x_1, \cdots, x_d \in \mathbb{R}^d$.
Indication : on pourra utiliser un argument abstrait sur les formes $d-$linéaires dans $\mathbb{R}^d$.

2. On considère $A \in C^0([0,T], M_d(\mathbb{R}))$ une matrice $d \times d$ dépendant du temps, et l'équation différentielle vectorielle
$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in [0,T], \qquad x \in C^1([0,T], \mathbb{R}^d)\,.$$
Soient $(x_j(t))_{j=1,\ldots,d}$ une famille de solutions de cette équation, et soit $w(t) := \det(x_1(t), \cdots, x_d(t))$ le wronskien associé à cette famille de solutions.
Montrer que w vérifie $w'(t) = \operatorname{Tr}(A(t))\, w(t)$. En déduire une expression de w.
On considère maintenant un champ de vecteurs autonome $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe $X(t,x) \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tel que
$$\begin{cases} \partial_t X(t,x) = b(X(t,x)), & (t,x) \in]0,T[\times\mathbb{R}^d, \\ X(0,x) = x, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$
(X est le flot engendré par le champ de vecteurs b).

3. On pose $x_i(t,x) = \partial_{x_i} X(t,x)$. Donner une équation différentielle vérifiée par $x_i(t,x)$.

4. Soit $J(t,x) := \det(x_1(t,x), \cdots, x_d(t,x))$. Donner une équation différentielle satisfaite par J, puis calculer ce dernier.

5. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que pour tout ensemble E mesurable borné de $\mathbb{R}^d$, on a
$$\frac{d}{dt}\lambda(X_t(E))\big|_{t=0} = \int_E \operatorname{div} b(x)dx \quad \text{ puis } \quad \frac{d}{dt}\lambda(X_t(E)) = \int_{X_t(E)} \operatorname{div} b(x)dx.$$
Donner une interprétation géométrique de la divergence du champ de vecteur b.

Exercice 2 (Exemple des champs linéaires)**.** Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $b(x) = Ax$. On utilise les notations de l'exercice précédent.

1. Calculer $\operatorname{div} b(x)$, $X_t(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda(X_t(E))$ pour un borné E de $\mathbb{R}^2$.

2. Dessiner $X_t(E)$ pour E le carré $E = [1,2] \times [1,2]$, et les valeurs suivantes pour la matrice A:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$