# TD2 – Equation de transport avec second membre

**Exercice 1.** Soit $b \in \mathbb{R}^d$ un vecteur constant et $f$ une fonction donnée sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. On considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b \cdot \nabla u(t,x) & = f(t,x) \text{ pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0}(x) & = u_0(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1}$$

1. Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, montrer qu'il existe une unique solution classique de (1), dont on donnera une expression explicite.
   *Indication: on pourra se servir de la fonction $u(t, x + tb)$.*
2. Si $f \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, montrer qu'on peut choisir une condition initiale $u_0$ explicite, pour que la solution de (1) soit à support compact dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

   On suppose maintenant $u_0 = 0$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.
3. Définir une notion de solution faible pour (1).
4. Montrer qu'une solution classique est solution faible et qu'une solution faible régulière est solution classique.

   Bonus:
5. Montrer que sous ces hypothèses, il existe une unique solution faible $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.