TD1 – Convolution et approximation

Exercice 1 (Convolution).

1. Soient deux fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que l'expression $f * g$, définie par
$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy,$$
a bien un sens en tant que fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et montrer que cette fonction vérifie $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.
Montrer que ce *produit de convolution* est commutatif: $f * g = g * f$.

2. On suppose ici $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^0(\mathbb{R}^d)$, et on rappelle que pour toute fonction f continue, son support $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}}$. Montrer que $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$, où on a noté $E + F = \{x + y, x \in E, y \in F\}$.

3. Montrer que si $f \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g$ est une fonction continue.

4. Montrer que si $f \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)$ et on a $\partial_{x_j}(f * g) = (\partial_{x_j} f) * g$ pour tout $j \in \{1, \cdots, d\}$.

Exercice 2 (Approximation de l'identité par convolution). Cet exercice a pour objectif de montrer le résultat d'approximation suivant:

Théorème 1. Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$. Pour tout $0 < \epsilon \leq 1$ on définit $\rho_\epsilon(x) := \epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$. Alors, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\lim_{\epsilon \searrow 0} \|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$.

On suppose dans un premier temps que $\operatorname{supp}(\rho) \subset \overline{B(0, R)}$, pour un $R > 0$.

1. Pour $\epsilon > 0$, dans quelle boule est supportée la fonction ρ_ϵ? En déduire que pour toute fonction $f \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$, on a la limite $\lim_{\epsilon \to 0} \|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0$.
En déduire, sous ces hypothèses, le résultat du théorème.
Indication : on rappelle qu'une fonction $f \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue.

2. Conclure la preuve du théorème pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ quelconque.
Indication : on pourra utiliser la densité de $C^0_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

3. On ne suppose maintenant plus ρ à support compact. On pose, pour $A > 0$ (qu'on prendra "grand"), $\rho^A(x) := \mathbb{1}_{B(0,A)}(x)\rho(x)\left(\int_{B(0,A)} \rho\right)^{-1}$ et $\rho^A_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\rho^A(x/\epsilon)$. Montrer que $\lim_{A \to \infty} \|\rho^A - \rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$. En déduire le cas général du théorème.

4. Montrer que si on suppose que le "noyau de convolution" $\rho \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\rho \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$), alors les fonctions $\rho_\epsilon * f$ sont C^0 (resp. C^1).