

**EXAMEN 2024 DU COURS “INTRODUCTION AUX EDP”, MDD358
CORRECTION SOMMAIRE DE L’EXAMEN**

STÉPHANE NONNENMACHER

Exercice 1. Soit $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^d . On s’intéresse à l’équation :

$$(0.1) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) + \operatorname{div}(b(x)u(t, x)) = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

- (1) Rappeler la définition du flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ engendré par le champ de vecteurs b . Expliquer pourquoi ce flot est défini globalement (c’est-à-dire pour tout $t \in \mathbb{R}$). Le flot $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est une famille de difféomorphismes de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, indicés par le paramètre “temps” ($t \in \mathbb{R}$). Les applications ϕ_t sont définies en résolvant une EDO : pour un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ donné, l’application $t \in \mathbb{R} \mapsto \phi_t(x_0) \in \mathbb{R}^d$ est définie en résolvant l’EDO

$$(0.2) \quad \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = b(x(t)), & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

et en définissant alors $\phi_t(x_0) := x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une application C^1 , le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que l’EDO ci-dessus admet une solution unique localement (dans un intervalle ouvert contenant $t = 0$). Le fait que b soit borné implique qu’on peut contrôler la vitesse à laquelle $x(t)$ part vers l’infini :

$$\|\phi_t(x_0) - x_0\| \leq \|b\|_{sup}|t|,$$

Cette inégalité montre que $x(t)$ ne peut pas partir vers l’infini en un temps fini. L’EDO (0.2) admet donc une solution pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc une solution globale.

- (2) Rappeler la définition d’une solution classique de cette équation. Une solution classique à (0.1) est une fonction $u \in C^1(]0, \infty[\times \mathbb{R}^d) \cap C^0([0, \infty[\times \mathbb{R}^d)$ qui vérifie (0.1) en chaque point $(t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^d$.
- (3) On rappelle la définition du jacobien associé au flot : $J_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det(D\phi_t(x))$, où $D\phi_t(x)$ est la matrice jacobienne du flot ϕ_t au point x . Rappeler l’équation différentielle reliant $J_t(x)$ et $\operatorname{div} b(x)$.
Si on fixe le point $x \in \mathbb{R}^d$, le jacobien $J_t(x)$ satisfait l’équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} J_t(x) = \operatorname{div}(b)(\phi_t(x)) J_t(x), & \forall t \in \mathbb{R}, \\ J_0(x) = 1. \end{cases}$$

- (4) En guise d’exemple (pouvant, au besoin, aider à retrouver l’équation du 3), on considère le champ de vecteurs $b(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \vdots \\ \alpha_d x_d \end{pmatrix}$, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ des nombres réels fixés.

Le champ $b(x)$ dépend donc linéairement de x . Pour ce champ, donner l’expression explicite du flot $\phi_t(x)$ pour tout $t > 0$, en résolvant l’EDO satisfaite par le flot. L’EDO définissant le flot $\phi_t(x)$ s’écrit comme suit, en écrivant la solution $x(t)$ comme

un vecteur colonne $x(t) = {}^t(x_1(t), \dots, x_d(t))$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix} = b(x(t)) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_d x_d(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_d(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,d} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de d EDO de dimension 1 découplées, ayant comme solutions $x_k(t) = e^{\alpha_k t} x_{0,k}$ pour chaque composante $k = 1, \dots, d$. On aboutit donc à l'expression suivante pour le flot :

$$\phi_t(x_0) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} x_{0,1} \\ \vdots \\ e^{\alpha_d t} x_{0,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_d t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,d} \end{pmatrix}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Calculer ensuite la matrice jacobienne $D\phi_t(x)$, puis le jacobien $J_t(x)$. A t fixé, le flot $\phi_t(x)$ calculé ci-dessus est une application linéaire par rapport à x_0 , donc la matrice jacobienne $D\phi_t(x)$ est donnée par la matrice représentant cette application linéaire :

$$D\phi_t(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_d t} \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}.$$

C'est une matrice diagonale, donc son déterminant est donné par

$$J_t(x) = \det(D\phi_t(x)) = \prod_{k=1}^d e^{\alpha_k t} = \exp\left(t \sum_{k=1}^d \alpha_k\right).$$

Calculer $\operatorname{div} b(x)$, et retrouver l'équation différentielle du 3 pour ce cas particulier. Le calcul de la divergence de $b(x)$ est rapide :

$$\operatorname{div} b(x) = \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} b_k(x) = \sum_{k=1}^d \partial_{x_k} (\alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^d \alpha_k.$$

On remarque que cette divergence est indépendante de $x \in \mathbb{R}^d$. En reprenant l'expression de $J_t(x)$, on retrouve bien l'EDO de la question (3) :

$$\frac{d}{dt} J_t(x) = \frac{d}{dt} \exp\left(t \sum_{k=1}^d \alpha_k\right) = \left(\sum_{k=1}^d \alpha_k\right) \exp\left(t \sum_{k=1}^d \alpha_k\right) = (\operatorname{div} b)(\phi_t(x)) J_t(x).$$

- (5) Sans calculer explicitement la solution de l'équation (0.1), montrer que pour toute solution classique u telle que, pour tout temps t , on a $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la "masse algébrique" de la solution,

$$m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) dx, \quad t \geq 0,$$

est indépendante temps.

(on l'appelle "masse algébrique" car u peut prendre des valeurs positives et négatives).

On a envie de calculer la dérivée temporelle de la masse algébrique en appliquant le

théorème de dérivation sous l'intégrale : on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u(t, x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(b(x)u(t, x)) dx \\ &= - \sum_k \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_k} (b_k(x)u(t, x)) dx. \end{aligned}$$

L'intégrale sur $x_k \in \mathbb{R}$ de cette dérivée totale est nulle (il n'y a pas de termes de bord), d'où finalement le résultat $\frac{d}{dt}m(t) = 0$. Pour justifier ce calcul, il faut vérifier que les hypothèses adéquates soient satisfaites par la solution $u(t, x)$. L'hypothèse indiquée dans l'énoncé est en fait insuffisante : pour que $m(t)$ soit continue, il faut que sur tout intervalle borné $[T_1, T_2]$, la fonction $u(t, \cdot)$ soit dominée par une fonction $g \in L^1$. Et pour pouvoir dériver sous l'intégrale, il faut que la dérivées temporelle $\partial_t u$ soit dominée par une fonction L^1 sur tout intervalle. Enfin, pour qu'on puisse décomposer la divergence et procéder aux intégrations par parties, il faut que chaque dérivée spatiale $\partial_{x_k} u$ soit dans L^1 . Ces conditions sont par exemple satisfaites si $u_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, qui implique que $u(t, \cdot) \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout temps, avec un support uniforme si $t \in [T_1, T_2]$.

- (6) On veut montrer que pour ces solutions telles que $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la masse totale

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)| dx, \quad t \geq 0,$$

est également indépendante du temps. Si $u(t, \cdot)$ n'est pas de signe constant, peut-on utiliser la méthode de la question précédente pour montrer cette invariance? Il y a un problème aux points où $u(t, x)$ change de signe : en ces points, la fonction $|u(t, x)|$ n'est en général pas dérivable. Donc on ne peut pas utiliser l'argument de la question précédente, qui utilisait les dérivées partielles de u .

- (7) On veut maintenant résoudre l'équation (0.1) explicitement, pour une donnée initiale $u_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe une solution classique u . En définissant $v(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} u(t, \phi_t(x)) \times J_t(x)$, calculer $\partial_t v(t, x)$, et en déduire l'expression de $v(t, x)$ en fonction de la donnée initiale u_0 .
On applique la règle de Leibniz et la règle de chaîne :

$$\begin{aligned} \partial_t (u(t, \phi_t(x)) \times J_t(x)) &= \partial_t (u(t, \phi_t(x))) J_t(x) + u(t, \phi_t(x)) \partial_t J_t(x) \\ &= ((\partial_t u)(t, \phi_t(x)) + \partial_t \phi_t(x) \cdot (\nabla u)(t, \phi_t(x))) J_t(x) + u(t, \phi_t(x)) \operatorname{div}(b)(\phi_t(x)) J_t(x) \\ &= ((\partial_t u)(t, \phi_t(x)) + b(\phi_t(x)) \cdot (\nabla u)(t, \phi_t(x)) + u(t, \phi_t(x)) \operatorname{div}(b)(\phi_t(x))) J_t(x). \end{aligned}$$

A la 2e ligne on s'est servi de la question (3), et à la dernière ligne de la définition du flot. On remarque que

$$\operatorname{div}(bu) = \sum_k \partial_k (b_k u) = \sum_k (\partial_k b_k) u + b_k (\partial_k u) = \operatorname{div}(b)u + b \cdot \nabla u,$$

ce qui permet de regrouper les deux derniers termes dans l'expression ci-dessus : on a alors

$$\partial_t v(t, x) = (\partial_t u + \operatorname{div}(bu))(t, \phi_t(x)) J_t(x) = 0,$$

en se servant de l'équation (0.1). La fonction $v(t, x)$ est donc indépendant du temps. On a donc :

$$\forall t, x, \quad v(t, x) = v(0, x) = u_0(x),$$

où on s'est servi du fait que $\phi_0(x) = x$ et $J_0(x) = 1$.

- (8) En déduire l'expression de la solution $u(t, x)$ en fonction de u_0 et du jacobien J_t , puis en fonction de u_0 et du jacobien J_{-t} .

En reprenant l'expression de $v(t, x)$, on trouve :

$$\forall t, x, \quad u(t, \phi_t(x)) \times J_t(x) = u_0(x),$$

donc en posant $y = \phi_t(x)$, ce qui équivaut à $x = (\phi_t)^{-1}(y) = \phi_{-t}(y)$, on obtient

$$\forall t, y, \quad u(t, y) = u_0(\phi_{-t}(y)) \frac{1}{J_t(\phi_{-t}(y))}.$$

La définition du Jacobien $J_t(x) = \det(D\phi_t(x))$ donne, pour un temps négatif, $J_{-t}(x) = \det(D\phi_{-t}(x))$. En reprenant les notations $y = \phi_t(x)$, $x = \phi_{-t}(y)$, on peut réécrire ces Jacobiens :

$$J_t(x) = \det\left(\frac{Dy}{Dx}\right), \quad J_{-t}(y) = \det\left(\frac{Dx}{Dy}\right),$$

où les deux matrices sont l'inverse l'une de l'autre. On en déduit donc l'identité :

$$(0.3) \quad J_{-t}(y) = \frac{1}{J_t(x)} = \frac{1}{J_t(\phi_{-t}(y))}.$$

Finalement, on a l'expression pour notre solution u

$$\forall t, y, \quad u(t, y) = u_0(\phi_{-t}(y)) J_{-t}(y).$$

- (9) Vérifier que cette expression est bien solution classique de (0.1), et qu'elle est unique.

Conseil : soyez astucieux et ne vous perdez pas dans des calculs sans fin.

Comme la donnée initiale $x \mapsto u_0(x)$, le flot $(t, y) \mapsto \phi_{-t}(y)$ et le jacobien $(t, y) \mapsto J_{-t}(y)$ sont des fonctions C^1 , on voit que $(t, y) \mapsto u(t, y)$ est C^1 (sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$). Pour montrer que u est solution de (0.1), il suffit de remonter les égalités reliant v à u . On tombe alors sur l'égalité, pour tout (t, x) :

$$0 = \partial_t v(t, x) = (\partial_t u + \operatorname{div}(bu))(t, \phi_t(x)) J_t(x).$$

Comme J_t ne s'annule nulle part, on déduit que u vérifie partout $(\partial_t u + \operatorname{div}(bu))(t, \phi_t(x)) = 0$. Comme ϕ_t est surjectif, cela montre que $(\partial_t u + \operatorname{div}(bu))(t, y) = 0$ pour tout (t, y) . L'unicité de la solution u provient de l'unicité de la solution v de $\partial_t v(t, x) = 0$ avec condition initiale $v(0, x) = u_0(x)$.

- (10) Montrer que la masse totale $M(t)$ de cette solution est indépendante du temps.

On peut maintenant se servir de la solution explicite $u(t, y) = u_0(\phi_{-t}(y)) J_{-t}(y)$, et procéder au changement de variable $x = \phi_{-t}(y)$:

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(\phi_{-t}(y))| J_{-t}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)| J_{-t}(\phi_t(x)) J_t(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)| dx, \end{aligned}$$

en utilisant les relations (0.3) entre J_t et J_{-t} . Cette expression est bien entendu indépendante de t .

- (11) Proposer une notion de solution faible pour (0.1).

On procède par analogie avec la notion de solution faible vue en cours. Il s'agissait d'abord de partir d'une solution classique $u(t, x)$, et d'intégrer l'équation qu'elle satisfait contre une fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. On écrit donc :

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} (\partial_t u(t, x) + \operatorname{div}(b(x)u(t, x))) \varphi(t, x) dt dx.$$

Ensuite, on intègre par parties chaque terme, par rapport aux variables sur lesquelles on dérive. Ainsi en appliquant Fubini et en intégrant le premier terme par partie en t , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \partial_t u(t, x) \varphi(t, x) dt dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(t, x) \varphi(t, x) dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(-u(0, x) \varphi(0, x) - \int_{\mathbb{R}_+} u(t, x) \partial_t \varphi(t, x) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Et pour chaque composante, on a de même

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \partial_k (b_k(x) u(t, x)) \varphi(t, x) dt dx &= \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_k (b_k(x) u(t, x)) \varphi(t, x) dx_k \right) \prod_{i \neq k} dx_i dt \\ &\quad \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(- \int_{\mathbb{R}} b_k(x) u(t, x) \partial_k \varphi(t, x) dx_k \right) \prod_{i \neq k} dx_i dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} u(t, x) b_k(x) \partial_k \varphi(t, x) dx dt \end{aligned}$$

(il n'y a pas de termes de bord car x_k est intégré sur \mathbb{R}). En sommant tous ces termes et en se souvenant que $u(0, x) = u_0(x)$, on obtient :

$$(0.4) \quad 0 = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} u(t, x) (\partial_t \varphi(t, x) + b(x) \cdot \nabla \varphi(x, t)) dt dx.$$

Dans cette équation, aucune dérivée de u n'apparaît. Comme $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$, les intégrales ont un sens si $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. C'est à partir de cette équation, satisfaite pour une solution classique, qu'on définit la notion de solution faible : pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on dit que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ est une solution faible de (0.1) si et seulement si, pour toute fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1})$, u vérifie (0.4).

Donner l'expression explicite d'une solution faible pour une donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Pour une donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la solution faible sera donnée par la même équation que la solution classique :

$$(0.5) \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad u(t, x) = u_0(\phi_{-t}(x)) \frac{1}{J_t(\phi_{-t}(x))}.$$

En injectant cette solution dans l'équation (0.4) et en procédant, pour chaque temps t , au changement de variable $y = \phi_{-t}(x)$, on obtient l'expression

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} u_0(y) \frac{1}{J_t(y)} (\partial_t \varphi(t, \phi_t(y)) + b(\phi_t(y)) \cdot \nabla \varphi(\phi_t(y), t)) J_t(y) dy dt$$

On remarque alors que dans la seconde intégrale, le terme entre parenthèses peut s'écrire $\partial_t \psi(t, y)$, si on prend $\psi(t, y) := \varphi(t, \phi_t(y))$. On aboutit alors à

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(0, x) dx + \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} u_0(y) \partial_t \psi(t, y) dy dt$$

L'intégrale par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$ nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(0, x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \psi(0, y) dy = 0,$$

puisque $\psi(0, y) = \varphi(0, y)$. On a donc montré que la fonction (0.5) est une solution faible.

Cette solution est-elle unique ?

Pour montrer l'unicité, de la solution, il faut montrer que la seule solution faible

dans le cas $u_0 \equiv 0$ est la solution nulle. Une telle solution \tilde{u} doit vérifier, pour toute fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, l'équation

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \tilde{u}(t, x) (\partial_t \varphi(t, x) + b(x) \cdot \nabla \varphi(t, x)) dt dx.$$

Dans le cours, pour toute fonction test $\psi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, on a construit une fonction $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifie

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad \partial_t \varphi(t, x) + b(x) \cdot \nabla \varphi(x, t) = \psi(t, x).$$

La solution \tilde{u} doit donc satisfaire, pour toute ψ :

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \tilde{u}(t, x) \psi(t, x) dt dx.$$

Le cours nous enseigne que cette propriété impose que $\tilde{u} = 0$ dans L_{loc}^1 .

- (12) Montrer que pour cette solution faible $u(t, \cdot)$, la masse totale $M(t)$ et la masse algébrique $m(t)$ sont bien définies, et sont toutes deux indépendantes du temps. Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour chaque $t \geq 0$, le changement de variable utilisé pour calculer $M(t)$ dans la question 10 s'applique également à la solution $u(t, x)$, et permet de montrer que

$$M(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

En particulier, on voit que $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ce qui montre que l'intégrale définissant $m(t)$ est finie. Le même changement de variable peut être utilisé dans le calcul de $m(t)$, et montre que

$$\forall t \geq 0, \quad m(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) dx.$$

- (13) On remarque que $M(t) = \|u(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. La norme $\|u(t, \cdot)\|_{L^2}$ est-elle aussi conservée ?

En reprenant le même changement de variable que dans la question 10, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, y)|^2 dy &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(\phi_{-t}(y))|^2 J_{-t}(y)^2 dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 J_{-t}(\phi_t(x))^2 J_t(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 J_{-t}(\phi_t(x)) dx \end{aligned}$$

En général, cette intégrale dépend du temps car le jacobien peut varier avec le temps. Proposer une condition suffisante sur le champ b pour que $M(t)$ soit conservée. Il suffit que le flot ϕ_t engendré par le champ de vecteurs b vérifie $J_t(x) \equiv 1$ pour tout $t, x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. C'est le cas si le champ b est à divergence nulle en tout point. A partir de l'équation différentielle satisfaite par J_t , on a alors $\partial_t J_t(x) = 0$ pour tout t, x , et donc $J_t(x) \equiv 1$.

- (14) Pour $u_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ et $t > 0$, on définit la fonction $w(t, x) = u_0(\phi_{-t}(x)) \sqrt{J_{-t}(x)}$. Trouver une équation aux dérivées partielles satisfaite par $w(t, x)$, et qui ressemble à (0.1). Vérifier que la norme $\|w(t, \cdot)\|_{L^2}$ est conservée. Indication : étudier la dérivée temporelle de $W(t, x) = w(t, \phi_t(x))$. L'astuce consiste à réécrire $w(t, x) = u_0(\phi_{-t}(x)) (J_t(\phi_{-t}(x)))^{-1/2}$, et donc $W(t, x) =$

$u_0(x) (J_t(x))^{-1/2}$. On a alors

$$\begin{aligned} \partial_t W(t, x) &= -\frac{1}{2} u_0(x) \partial_t J_t(x) (J_t(x))^{-3/2} = -\frac{1}{2} u_0(x) \operatorname{div} b(\phi_t(x)) J_t(x) (J_t(x))^{-3/2} \\ &= -\frac{1}{2} u_0(x) \operatorname{div} b(\phi_t(x)) J_t(x) (J_t(x))^{-3/2} \\ &= -\frac{1}{2} u_0(x) \operatorname{div} b(\phi_t(x)) (J_t(x))^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2} W(t, x) \operatorname{div} b(\phi_t(x)). \end{aligned}$$

En revenant à la définition de W , on obtient

$$\partial_t w(t, \phi_t(x)) + b(\phi_t(x)) \cdot \nabla w(t, \phi_t(x)) = -\frac{1}{2} w(t, \phi_t(x)) \operatorname{div} b(\phi_t(x)).$$

Et en prenant $y = \phi_t(x)$, on obtient l'EDP

$$\partial_t w(t, y) + b(y) \cdot \nabla w(t, y) + \frac{1}{2} w(t, y) \operatorname{div} b(y) = 0.$$

Le calcul de la norme L^2 de w se fait comme dans la question 13 :

$$\begin{aligned} \|w(t, \cdot)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |w(t, y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(\phi_{-t}(y))|^2 J_{-t}(y) dy, \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 J_{-t}(\phi_t(x)) J_t(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Cette norme est donc invariante par rapport au temps.

Exercice 2. On considère une équation de transport avec un terme source :

$$(0.6) \quad \begin{cases} \partial_t u(t, x) + b(x) \cdot \nabla_x u(t, x) = F(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

On suppose que le champ $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, et que la fonction "source" $F \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. On appelle $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot engendré par ce champ de vecteurs.

- (1) On considère une donnée initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, et on cherche une solution classique $u(t, x)$ à cette équation. En considérant la fonction $v(t, x) = u(t, \phi_t(x))$, donner l'équation différentielle satisfaite par $v(t, x)$, et résoudre cette équation en fonction de F et u_0 .

L'équation satisfaite par v s'obtient en utilisant la règle de chaîne :

$$\begin{aligned} \partial_t (u(t, \phi_t(x))) &= (\partial_t u)(t, \phi_t(x)) + \partial_t \phi_t(x) \cdot (\nabla u)(t, \phi_t(x)) \\ &= (\partial_t u)(t, \phi_t(x)) + b(\phi_t(x)) \cdot (\nabla u)(t, \phi_t(x)). \end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation (0.6), on obtient :

$$\partial_t v(t, x) = F(t, \phi_t(x)).$$

Comme la donnée initiale $v(0, x) = u(0, x) = u_0(x)$, la solution $v(t, x)$ est donnée, pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$, par

$$v(t, x) = u_0(x) + \int_0^t F(s, \phi_s(x)) ds.$$

- (2) En déduire l'expression de $u(t, x)$. Montrer que cette solution est unique. Il suffit d'exprimer $u(t, x)$ en fonction de v :

$$u(t, x) = v(t, \phi_{-t}(x)) = u_0(\phi_{-t}(x)) + \int_0^t F(s, \phi_{s-t}(x)) ds.$$

Supposons que u_1 et u_2 sont 2 solutions classiques de l'équation (0.6). Alors $\tilde{u} = u_1 - u_2$ satisfait l'équation $\partial_t \tilde{u}(t, x) + b(x) \cdot \nabla_x \tilde{u}(t, x) = 0$, avec donnée initiale $\tilde{u}(0, x) = 0$. D'après le cours, la seule solution classique de ce problème est la solution nulle $\tilde{u} \equiv 0$. On trouve donc que $u_1 = u_2$, donc unicité de la solution.

- (3) On fixe un $T > 0$, et on choisit une donnée initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$. On cherche à contrôler la solution $u(t, x)$ au temps T , c'est-à-dire à trouver une fonction source F (qui dépendra de u_0) telle que la solution vérifie $u(t, \cdot) = 0$ pour tout $t \geq T$. Montrer que si $u(T, \cdot) = 0$ et $\partial_t u(T, \cdot) = 0$, alors la fonction de contrôle satisfait $F(t, \cdot) = 0$ pour tout $t \geq T$. On suppose en fait que $u(t, \cdot) = 0$ et $\partial_t u(t, \cdot) = 0$ non seulement en $t = T$, mais en tout $t \geq T$. Comme u vérifie l'équation (0.6), on trouve :

$$0 = \partial_t u(t, x) + b(x) \cdot \nabla u(t, x) = F(t, x) \quad \text{pour tout } t \geq T, x \in \mathbb{R}^d.$$

- (4) Soit une fonction de coupure $\chi \in C_c^0([T/4, 3T/4], \mathbb{R}_+)$ telle que $\int_0^T \chi(s) ds = 1$. Donner un exemple explicite de fonction χ ayant ces propriétés. La question était un peu ambiguë : j'avais en tête une fonction continue sur \mathbb{R} , à support dans $[T/4, 3T/4]$. Par exemple la "fonction tente"

$$\chi(t) = \begin{cases} \left(\frac{4}{T}\right)^2 \left(t - \frac{T}{4}\right), & t \in [T/4, T/2] \\ \left(\frac{4}{T}\right)^2 \left(\frac{3T}{4} - t\right), & t \in [T/2, 3T/4]. \end{cases}$$

On vérifie par un calcul élémentaire que $\int_0^T \chi(t) dt = 1$. En vous servant d'une telle fonction χ et de la donnée initiale u_0 , construire une fonction source $F(s, x)$ qui résolve le problème de contrôle de la question 3. On veut trouver F de telle sorte que $u(T, x) = 0$ pour tout x . A partir de l'expression ci-dessus de u , on obtient :

$$0 = u_0(\phi_{-T}(x)) + \int_0^T F(s, \phi_{s-T}(x)) ds,$$

donc en écrivant $y = \phi_{-T}(x)$,

$$\int_0^T F(s, \phi_s(y)) ds = -u_0(y).$$

Il suffit pour cela que, le long de cette caractéristique, la fonction F est égale à $-u_0(y)$, multipliée par la fonction temporelle $\chi(s)$. Ainsi, on peut prendre :

$$F(s, \phi_s(y)) = -\chi(s) u_0(y), \quad \text{pour tous } s \geq 0, y \in \mathbb{R}^d,$$

$$\text{donc } F(s, x) = -\chi(s) u_0(\phi_{-s}(x)) \quad \text{pour tous } s \geq 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

- (5) On se place à présent sur \mathbb{R}^2 , et on considère un champ de vecteurs particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad b(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} g(|x|),$$

où la fonction $g \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ satisfait $g(0) = 1$, $g(r) = O(r^{-1})$ lorsque $r \rightarrow \infty$. Vérifier que ce champ est bien dans $C_b^1(\mathbb{R}^2)$. Comme $x \mapsto |x|$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $b(x)$ est aussi C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. En $x = 0$, il faut

exhiber le développement limité de b en $x = 0$. En tenant compte de la continuité de g en $x = 0$, on a :

$$b(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} (1 + \mathcal{O}(|x|)) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|x|^2).$$

Ceci montre bien que b est dérivable en $x = 0$. Finalement, b est dérivable sur tout \mathbb{R}^2 . Les coordonnées de b satisfont $b_k(x) = \mathcal{O}(|x|)g(|x|) = \mathcal{O}(1)$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$, donc b_k est borné. Pour écrire que $b_k \in C_b^1$, il faudrait aussi vérifier que les dérivées $\partial_j b_k$ sont bornées uniformément, on a besoin de l'hypothèse supplémentaire $g'(r) = \mathcal{O}(r^{-1})$.

- (6) Calculer $\operatorname{div} b(x)$ pour ce champ de vecteurs.
Calcul direct :

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} b_1 + \partial_{x_2} b_2 &= -x_2 \partial_{x_1} |x| g'(|x|) + x_1 \partial_{x_2} |x| g'(|x|) \\ &= -x_2 \frac{x_1}{|x|} g'(|x|) + x_1 \frac{x_2}{|x|} g'(|x|) = 0. \end{aligned}$$

- (7) Montrer que pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}^2$, la trajectoire $\{x(t) = \phi_t(x_0), t \in \mathbb{R}\}$ engendrée par ce champ de vecteurs est circulaire.
On peut calculer la dérivée temporelle de $|x|^2$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) &= 2(x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2) = 2(-x_1 x_2 + x_2 x_1) g(|x|) \\ &= 2(x_1 b_1(x) + x_2 b_2(x)) \\ &= 2(-x_1 x_2 + x_2 x_1) g(|x|) = 0. \end{aligned}$$

Cette invariance de $|x|$ montre que la trajectoire issue de x_0 reste sur le cercle centré en l'origine, de rayon $|x_0|$.

- (8) En passant en coordonnées circulaires $\{(r, \theta)\}$ sur \mathbb{R}^2 , expliciter la trajectoire $\{\phi_t(x_0)\}$, et montrer qu'elle est périodique. Calculer sa période en fonction du point initial x_0 .
Comme r est indépendant du temps, la dérivée temporelle de $x = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ donne :

$$\dot{x} = r \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

D'un autre côté, le champ de vecteurs

$$b(x) = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} g(r).$$

En comparant les deux formules, on tire $\dot{\theta} = g(r)$, donc la vitesse angulaire ne dépend pas de θ , mais uniquement du rayon r . Comme r est constant, la vitesse $\dot{\theta}$ est aussi indépendante du temps. La périodicité vient du fait que $\theta \equiv \theta + 2\pi$. Donc pour les points de rayon r , la période vaut

$$T(r) = \frac{2\pi}{g(r)}.$$

- (9) On fixe $0 < r_1 < r_2$, et on suppose que la donnée initiale u_0 est supportée dans l'anneau $\{r_1 \leq |x| \leq r_2\}$. On considère un temps

$$T > \sup_{r_1 \leq r \leq r_2} \frac{2\pi}{g(r)}.$$

Pour deux angles $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, on considère le secteur angulaire $S = \{\theta_1 < \theta < \theta_2, r > 0\}$. Montrer qu'on peut construire une fonction source $F(t, x)$ qui contrôle la solution u au temps T , telle que F soit supportée à l'intérieur du secteur angulaire S .

La construction de F dans la question 4 consistait à donner la valeur de $u_0(y)$ le long de la caractéristique $C_T(y) = \{\phi_{-s}(y), s \in [0, T]\}$, pondérée par le facteur $\chi(s)$ qui est non nul lorsque $s \in]T/4, 3T/4[$ (pour la fonction χ “tente” explicitée plus haut). En particulier, si u_0 n’est nulle part nulle, alors $F(t, x)$ sera aussi non nulle dès que $t \in]T/4, 3T/4[$, quel que soit le point x . Pour construire une fonction F supportée dans le secteur S , il faut choisir différemment la partie de la caractéristique $C_T(y)$ durant laquelle F est non nulle. La condition sur T nous montre que, pour tout point x dans le support de u_0 , la caractéristique $C_T(x)$ contient tout le cercle de rayon $|x|$, puisque T est supérieur à la période de l’orbite de x . En particulier, cette caractéristique croise le secteur S durant un temps $\frac{\theta_2 - \theta}{g(|x|)}$. Il est donc possible de donner une valeur non nulle à $F(s, \phi_s(y))$ uniquement lorsque $\phi_s(y)$ croise le secteur S , en multipliant la valeur $-u_0(y)$ par une fonction $\chi_y(s)$ appropriée : χ_y doit vérifier $\int \chi_y(s) ds = 1$, et être non nulle uniquement lorsque $\phi_s(y)$ est dans le secteur S . Pour différents points y de même rayon r , les fonctions χ_y peuvent être choisies comme des translations les unes des autres.