EXAMEN 2024 DU COURS "INTRODUCTION AUX EDP", MDD358 CORRECTION DE L'EXAMEN (EXO 1)

STÉPHANE NONNENMACHER

Exercice 1. Soit $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$. On s'intéresse à l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \operatorname{div}(b(x)u(t,x)) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{0.1}$$

(1) Rappeler la définition du flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ engendré par le champ de vecteurs b. Expliquer pourquoi ce flot est défini globalement (c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbb{R}$).
Le flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est une famille de difféomorphismes de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, indicés par le paramètre "temps" ($t \in \mathbb{R}$). Les applications ϕ_t sont définis en résolvant une EDO : pour un point $x_0 \in \mathbb{R}^d$ donné, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \phi_t(x_0) \in \mathbb{R}^d$ est définie en résolvant l'EDO

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} & = b(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \\ x(0) & = x_0, \end{cases} \tag{0.2}$$

et en définissant alors $\phi_t(x_0) := x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application C^1, le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que l'EDO ci-dessus admet une solution unique localement (dans un intervalle ouvert contenant $t = 0$). Le fait que b soit borné implique qu'on peut contrôler la vitesse à laquelle $x(t)$ part vers l'infini :

$$\|\phi_t(x_0) - x_0\| \leq \|b\|_{sup}|t|,$$

Cette inégalité montre que $x(t)$ ne peut pas partir vers l'infini en un temps fini. L'EDO (0.2) admet donc une solution pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc une solution globale.

(2) Rappeler la définition d'une solution classique de cette équation.
Une solution classique à (0.1) est une fonction $u \in C^1(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d) \cap C^0([0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$ qui vérifie (0.1) en chaque point $(t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$.

(3) On rappelle la définition du jacobian associé au flot : $J_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \det(D\phi_t(x))$, où $D\phi_t(x)$ est la matrice jacobienne du flot ϕ_t au point x. Rappeler l'équation différentielle reliant $J_t(x)$ et $\operatorname{div} b(x)$.
Si on fixe le point $x \in \mathbb{R}^d$, le jacobien $J_t(x)$ satisfait l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} J_t(x) & = \operatorname{div}(b)\,(\phi_t(x))\; J_t(x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ J_0(x) & = 1\,. \end{cases}$$

(4) En guise d'exemple (pouvant, au besoin, aider à retrouver l'équation du 3), on considère le champ de vecteurs $b(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \vdots \\ \alpha_c x_d \end{pmatrix}$, avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ des nombres réels fixés.
Le champ $b(x)$ dépend donc linéairement de x. Pour ce champ, donner l'expression explicite du flot $\phi_t(x)$ pour tout $t > 0$, en résolvant l'EDO satisfaite par le flot.

L'EDO définissant le flot $\phi_t(x)$ s'écrit comme suit, en écrivant la solution $x(t)$ comme un vecteur colonne $x(t) =^t (x_1(t), \ldots, x_d(t))$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix} = b(x(t)) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_c x_d(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \vdots \\ x_d(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,d} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de d EDO de dimension 1 découplées, ayant comme solutions $x_k(t) = e^{\alpha_k t} x_{0,k}$ pour chaque composante $k = 1, \ldots, d$. On aboutit donc à l'expression suivante pour le flot :

$$\phi_t(x_0) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} x_{0,1} \\ \vdots \\ e^{\alpha_d t} x_{0,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_d t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{0,d} \end{pmatrix}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^d, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Calculer ensuite la matrice jacobienne $D\phi_t(x)$, puis le jacobien $J_t(x)$. A t fixé, le flot $\phi_t(x)$ calculé ci-dessus est une application linéaire par rapport à x_0, donc la matrice jacobienne $D\phi_t(x)$ est donnée par la matrice représentant cette application linéaire :

$$D\phi_t(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_d t} \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

C'est une matrice diagonale, donc son déterminant est donné par

$$J_t(x) = \det\left(D\phi_t(x)\right) = \prod_{k=1}^{d} e^{\alpha_k t} = \exp\left(t \sum_{k=1}^{d} \alpha_k\right).$$

Calculer $\operatorname{div} b(x)$, et retrouver l'équation différentielle du 3 pour ce cas particulier. Le calcul de la divergence de $b(x)$ est rapide :

$$\operatorname{div} b(x) = \sum_{k=1}^{d} \partial_{x_k} b_k(x) = \sum_{k=1}^{d} \partial_{x_k}(\alpha_k x_k) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k.$$

On remarque que cette divergence est indépendante de $x \in \mathbb{R}^d$. En reprenant l'expression de $J_t(x)$, on retrouve bien l'EDO de la question (3) :

$$\frac{d}{dt} J_t(x) = \frac{d}{dt}\exp\left(t \sum_{k=1}^{d} \alpha_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{d} \alpha_k\right) \exp\left(t \sum_{k=1}^{d} \alpha_k\right) = (\operatorname{div} b)\left(\phi_t(x)\right) J_t(x).$$

(5) Sans calculer explicitement la solution de l'équation (0.1), montrer que pour toute solution classique u telle que, pour tout temps t, on a $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la "masse algébrique" de la solution,

$$m(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\, dx, \quad t \geq 0,$$

est indépendante temps.
(on l'appelle "masse algébrique" carr u peut prendre des valeurs positives et négatives).
On a envie de calculer la dérivée temporelle de la masse algébrique en appliquant le

théorème de dérivation sous l'intégrale : on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u(t,x)\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}\left(b(x)u(t,x)\right)dx \\ &= -\sum_k \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_k}\left(b_k(x)u(t,x)\right)dx.\end{aligned}$$

L'intégrale sur $x_k \in \mathbb{R}$ de cette dérivée totale est nulle (il n'y a pas de termes de bord), d'où finalement le résultat $\frac{d}{dt}m(t) = 0$. Pour justifier ce calcul, il faut vérifier que les hypothèses adéquates soient satisfaites par la solution $u(t,x)$. L'hypothèse indiquée dans l'énoncé est en fait insuffisante : pour que $m(t)$ soit continue, il faut que sur tout intervalle borné $[T_1,T_2]$, la fonction $u(t,\cdot)$ soit dominée par une fonction $g \in L^1$. Et pour pouvoir dériver sous l'intégrale, il faut que la dérivées temporelle $\partial_t u$ soit dominée par une fonction L^1 sur tout intervalle. Enfin, pour qu'on puisse décomposer la divergence et procéder aux intégrations par parties, il faut que chaque dérivée spatiale $\partial_{x_k} u$ soit dans L^1. Ces conditions sont par exemple satisfaites su $u_0 \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$, qui implique que $u(t,\cdot) \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$ pour tout temps, avec un support uniforme si $t \in [T_1,T_2]$.

(6) On veut montrer que pour ces solutions telles que $u(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la masse totale

$$M(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|\,dx, \quad t \geq 0,$$

est également indépendante du temps. Si $u(t,\cdot)$ n'est pas de signe constant, peut-on utiliser la méthode de la question précédente pour montrer cette invariance ?
Il y a un problème aux points où $u(t,x)$ change de signe : en ces points, la fonction $|u(t,x)|$ n'est en général pas dérivable. Donc on ne peut pas utiliser l'argument de la question précédente, qui utilisait les dérivées partielles de u.

(7) On veut maintenant résoudre l'équation (0.1) explicitement, pour une donnée initiale $u_0 \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe une solution classique u. En définissant $v(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} u(t,\phi_t(x)) \times J_t(x)$, calculer $\partial_t v(t,x)$, et en déduire l'expression de $v(t,x)$ en fonction de la donnée initiale u_0.
On applique la règle de Leibniz et la règle de chaîne :

$$\begin{aligned}\partial_t\left(u(t,\phi_t(x)) \times J_t(x)\right) &= \partial_t\left(u(t,\phi_t(x))\right)J_t(x) + u(t,\phi_t(x))\,\partial_t J_t(x) \\ &= \left(\left(\partial_t u\right)(t,\phi_t(x)) + \partial_t\phi_t(x)\cdot\left(\nabla u\right)(t,\phi_t(x))\right)J_t(x) + u(t,\phi_t(x))\operatorname{div}(b)\left(\phi_t(x)\right)\,J_t(x) \\ &= \left(\left(\partial_t u\right)(t,\phi_t(x)) + b(\phi_t(x))\cdot\left(\nabla u\right)(t,\phi_t(x)) + u(t,\phi_t(x))\operatorname{div}(b)(\phi_t(x))\right)\,J_t(x).\end{aligned}$$

A la 2e ligne on s'est servi de la question (3), et à la dernière ligne de la définition du flot. On remarque que

$$\operatorname{div}(bu) = \sum_k \partial_k\left(b_k u\right) = \sum_k \left(\partial_k b_k\right)u + b_k\left(\partial_k u\right) = \operatorname{div}(b)u + b\cdot\nabla u,$$

ce qui permet de regrouper les deux derniers termes dans l'expression ci-dessus : on a alors

$$\partial_t v(t,x) = \left(\partial_t u + \operatorname{div}(bu)\right)(t,\phi_t(x))\,J_t(x) = 0,$$

en se servant de l'équation (0.1). La fonction $v(t,x)$ est donc indépendant du temps. On a donc :

$$\forall t,x, \quad v(t,x) = v(0,x) = u_0(x),$$

où on s'est servi du fait que $\phi_0(x) = x$ et $J_0(x) = 1$.

(8) En déduire l'expression de la solution $u(t,x)$ en fonction de u_0 et du jacobien J_t, puis en fonction de u_0 et du jacobien J_{-t}.
En reprenant l'expression de $v(t,x)$, on trouve :
$$\forall t, x, \qquad u(t, \phi_t(x)) \times J_t(x) = u_0(x),$$
donc en posant $y = \phi_t(x)$, ce qui équivaut à $x = (\phi_t)^{-1}(x) = \phi_{-t}(x)$, on obtient
$$\forall t, y, \qquad u(t,y) = u_0(\phi_{-t}(y))\, \frac{1}{J_t(\phi_{-t}(y))}.$$
La définition du Jacobien $J_t(x) = \det(D\phi_t(x))$ donne, pour un temps négatif, $J_{-t}(x) = \det(D\phi_{-t}(x))$. En reprenant les notations $y = \phi_t(x)$, $x = \phi_{-t}(y)$, on peut réécrire ces Jacobiens :
$$J_t(x) = \det\left(\frac{Dy}{Dx}\right), \quad J_{-t}(y) = \det\left(\frac{Dx}{Dy}\right),$$
où les deux matrices sont l'inverse l'une de l'autre. On en déduit donc l'identité :
$$J_{-t}(y) = \frac{1}{J_t(x)} = \frac{1}{J_t(\phi_{-t}(y))}. \tag{0.3}$$
Finalement, on a l'expression pour notre solution u
$$\forall t, y, \qquad u(t,y) = u_0(\phi_{-t}(y))\, J_{-t}(y).$$

(9) Vérifier que cette expression est bien solution classique de (0.1), et qu'elle est unique. *Conseil :* soyez astucieux et ne vous perdez pas dans des calculs sans fin.
Comme la donnée initiale $x \mapsto u_0(x)$, le flot $(t,y) \mapsto \phi_{-t}(y)$ et le jacobien $(t,y) \mapsto J_{-t}(y)$ sont des fonctions C^1, on voit que $(t,y) \mapsto u(t,y)$ est C^1 (sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$). Pour montrer que u est solution de (0.1), il suffit de remonter les égalités reliant v à u. On tombe alors sur l'égalité, pour tout (t,x) :
$$0 = \partial_t v(t,x) = (\partial_t u + \mathrm{div}(bu))\,(t, \phi_t(x))\, J_t(x).$$
Comme J_t ne s'annule nulle part, on déduit que u vérifie partout $(\partial_t u + \mathrm{div}(bu))\,(t,\phi_t(x)) = 0$. Comme ϕ_t est surjectif, cela montre que $(\partial_t u + \mathrm{div}(bu))\,(t,y) = 0$ pour tout (t,y).
L'unicité de la solution u provient de l'unicité de la solution v de $\partial_t v(t,x) = 0$ avec condition initiale $v(0,x) = u_0(x)$.

(10) Montrer que la masse totale $M(t)$ de cette solution est indépendante du temps.
On peut maintenant se servir de la solution explicite $u(t,y) = u_0(\phi_{-t}(y))\, J_{-t}(y)$, et procéder au changement de variable $x = \phi_{-t}(y)$:
$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(\phi_{-t}(y))|\; J_{-t}(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|\; J_{-t}(\phi_t(x))\, J_t(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|\; dx, \end{aligned}$$
en utilisant les relations (0.3) entre J_t et J_{-t}. Cette expression est bien entendu indépendante de t.

(11) Proposer une notion de solution faible pour (0.1).
On procède par analogie avec la notion de solution faible vue en cours. Il s'agissait d'abord de partir d'une solution classique $u(t,x)$, et d'intégrer l'équation qu'elle satisfait contre une fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. On écrit donc :
$$0 = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} (\partial_t u(t,x) + \mathrm{div}\,(b(x)u(t,x)))\, \varphi(t,x)\, dt\, dx.$$

Ensuite, on intègre par parties chaque terme, par rapport aux variables sur lesquelles on dérive. Ainsi en appliquant Fubini et en intégrant le premier terme par partie en t, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \partial_t u(t,x)\,\varphi(t,x)\,dt\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(t,x)\,\varphi(t,x)\,dt\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(-u(0,x)\varphi(0,x) - \int_{\mathbb{R}_+} u(t,x)\,\partial_t\varphi(t,x)\,dt\right)dx.\end{aligned}$$

Et pour chaque composante, on a de même

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \partial_k\left(b_k(x)u(t,x)\right)\,\varphi(t,x)\,dt\,dx &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{\mathbb{R}} \partial_k\left(b_k(x)u(t,x)\right)\,\varphi(t,x)\,dx_k\right)\prod_{i\neq k} dx_i dt \\ &\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(-\int_{\mathbb{R}} b_k(x)u(t,x)\,\partial_k\varphi(t,x)\,dx_k\right)\prod_{i\neq k} dx_i dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u(t,x)\,b_k(x)\,\partial_k\varphi(t,x)\,dxdt\end{aligned}$$

(il n'y a pas de termes de bord car x_k est intégré sur $\mathbb{R}$). En sommant tous ces termes et en se souvenant que $u(0,x)=u_0(x)$, on obtient :

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)dx + \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u(t,x)\,\left(\partial_t\varphi(t,x) + b(x)\cdot\nabla\varphi(x,t)\right)\,dtdx. \tag{0.4}$$

Dans cette équation, aucune dérivée de u n'apparaît. Comme $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1})$, les intégrales ont un sens si $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$. C'est à partir de cette équation, satisfaite pour une solution classique, qu'on définit la notion de solution faible : pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on dit que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$ est une solution faible de (0.1) si et seulement si, pour toute fonction test $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1})$, u vérifie (0.4).

Donner l'expression explicite d'une solution faible pour une donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Pour une donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la solution faible sera donnée par la même équation que la solution classique :

$$\forall t \geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d, \qquad u(t,x) = u_0(\phi_{-t}(x))\,\frac{1}{J_t(\phi_{-t}(x))}. \tag{0.5}$$

En injectant cette solution dans l'équation (0.4) et en procédant, pour chaque temps t, au changement de variable $y=\phi_{-t}(x)$, on obtient l'expression

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)dx + \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u_0(y)\frac{1}{J_t(y)}\,\left(\partial_t\varphi(t,\phi_t(y)) + b(\phi_t(y))\cdot\nabla\varphi(\phi_t(y),t)\right)J_t(y)dy\,dt$$

On remarque alors que dans la seconde intégrale, le terme entre parenthèses peut s'écrire $\partial_t\psi(t,y)$, si on prend $\psi(t,y) := \varphi(t,\phi_t(y))$. On aboutit alors à

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)dx + \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u_0(y)\,\partial_t\psi(t,y)\,dy\,dt$$

L'intégrale par rapport à $t\in\mathbb{R}_+$ nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)dx - \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\,\psi(0,y)\,dy = 0,$$

puisque $\psi(0,y)=\varphi(0,y)$. On a donc montré que la fonction (0.5) est une solution faible.

Cette solution est-elle unique ?

Pour montrer l'unicité, de la solution, il faut montrer que la seule solution faible dans le cas $u_0 \equiv 0$ est la solution nulle. Une telle solution $\tilde{u}$ doit vérifier, pour toute fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, l'équation

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \tilde{u}(t,x) \, \left(\partial_t \varphi(t,x) + b(x) \cdot \nabla \varphi(t,x)\right) \, dt dx.$$

Dans le cours, pour toute fonction test $\psi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, on a construit une fonction $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ qui vérifie

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad \partial_t \varphi(t,x) + b(x) \cdot \nabla \varphi(x,t) = \psi(t,x).$$

La solution $\tilde{u}$ doit donc satisfaire, pour toute ψ :

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \tilde{u}(t,x) \, \psi(t,x) \, dt dx.$$

Le cours nous enseigne que cette propriété impose que $\tilde{u} = 0$ dans L^1_{loc}.

(12) Montrer que pour cette solution faible $u(t,\cdot)$, la masse totale $M(t)$ et la masse algébrique $m(t)$ sont bien définies, et sont toutes deux indépendantes du temps.
Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour chaque $t \geq 0$, le changement de variable utilisé pour calculer $M(t)$ dans la question 10 s'applique également à la solution $u(t,x)$, et permet de montrer que

$$M(t) = \|u(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

En particulier, on voit que $u(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ce qui montre que l'intégrale définissant $m(t)$ est finie. Le même changement de variable peut être utilisé dans le calcul de $m(t)$, et montre que

$$\forall t \geq 0, \quad m(t) = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \, dx.$$

(13) On remarque que $M(t) = \|u(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$. La norme $\|u(t,\cdot)\|_{L^2}$ est-elle aussi conservée ?
En reprenant le même changement de variable que dans la question 10, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,y)|^2 \, dy &= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(\phi_{-t}(y))|^2 \; J_{-t}(y)^2 \, dy, \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 \; J_{-t}(\phi_t(x))^2 \, J_t(x) \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 \; J_{-t}(\phi_t(x)) \, dx
\end{aligned}$$

En général, cette intégrale dépend du temps car le jacobien peut varier avec le temps.
Proposer une condition suffisante sur le champ b pour que $M(t)$ soit conservée.
Il suffit que le flot ϕ_t engendré par le champ de vecteurs b vérifie $J_t(x) \equiv 1$ pour tout $t, x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. C'est le cas si le champ b est à divergence nulle en tout point. A partir de l'équation différentielle satisfaite par J_t, on a alors $\partial_t J_t(x) = 0$ pour tout t, x, et donc $J_t(x) \equiv 1$.

(14) Pour $u_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ et $t > 0$, on définit la fonction $w(t,x) = u_0(\phi_{-t}(x))\sqrt{J_{-t}(x)}$. Trouver une équation aux dérivées partielles satisfaite par $w(t,x)$, et qui ressemble à (0.1). Vérifier que la norme $\|w(t,\cdot)\|_{L^2}$ est conservée.
Indication : étudier la dérivée temporelle de $W(t,x) = w(t,\phi_t(x))$.
L'astuce consiste à réécrire $w(t,x) = u_0(\phi_{-t}(x)) \, (J_t(\phi_{-t}(x)))^{-1/2}$, et donc $W(t,x) =$

$u_0(x)\,(J_t(x))^{-1/2}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\partial_t W(t,x) &= -\frac{1}{2}u_0(x)\,\partial_t J_t(x)\,(J_t(x))^{-3/2} = -\frac{1}{2}u_0(x)\,\mathrm{div}b(\phi_t(x))\,J_t(x)\;(J_t(x))^{-3/2}\\
&= -\frac{1}{2}u_0(x)\,\mathrm{div}b(\phi_t(x))\,J_t(x)\;(J_t(x))^{-3/2}\\
&= -\frac{1}{2}u_0(x)\,\mathrm{div}b(\phi_t(x))\;(J_t(x))^{-1/2}\\
&= -\frac{1}{2}W(t,x)\,\mathrm{div}b(\phi_t(x)).
\end{aligned}$$

En revenant à la définition de W, on obtient

$$\partial_t w(t,\phi_t(x)) + b(\phi_t(x))\cdot\nabla w(t,\phi_t(x)) = -\frac{1}{2}w(t,\phi_t(x))\,\mathrm{div}b(\phi_t(x)).$$

Et en prenant $y=\phi_t(x)$, on obtient l’EDP

$$\partial_t w(t,y) + b(y)\cdot\nabla w(t,y) + \frac{1}{2}w(t,y)\,\mathrm{div}b(y) = 0.$$

Le calcul de la norme L^2 de w se fait comme dans la question 13 :

$$\begin{aligned}
\|w(t,\cdot)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d}|w(t,y)|^2\,dy &= \int_{\mathbb{R}^d}|u_0(\phi_{-t}(y))|^2\;J_{-t}(y)\,dy,\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}|u_0(x)|^2\;J_{-t}(\phi_t(x))\,J_t(x)\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}|u_0(x)|^2\;dx.
\end{aligned}$$

Cette norme est donc invariante par rapport au temps.