Ch 0 : Introduction

I) Rappels et notations de calcul diff

$$f : \underbrace{U}_{\text{ouvert}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Def : ⚬ f est différentiable au point $x \in U$

si $\quad f(x+h) = f(x) + \underbrace{Df(x)(h)}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{\|h\|\mathcal{E}(h)}_{\text{négligeable par rapport à } h}$

avec $\mathcal{E}(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

avec $h \longmapsto Df(x)(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

différentielle de f au pt x

⚬ f a une dérivée partielle en $x = (x_1 \dots x_n)$ par rapport à la variable x_i ($i \in \{1 \dots n\}$) si

$$\frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t}$$

a une limite lorsque $t \longrightarrow 0$; on note cette limite $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ou $\partial_{x_i} f(x)$ ou $\underbrace{\partial_i f(x)}_{\in \mathbb{R}^p}$

$f(x + te_i)$

e_i = ième vect de base.

Rappel : ✲ f différentiable en $x \Longrightarrow f$ a une dérivée partielle dans toutes les directions et

$$Df(x)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

✲ $$Df(x)(h) \in \mathbb{R}^p$$

$$\big(Df(x)(h)\big)_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\, h_j$$

Matrice Jacobienne $= \mathcal{M}_{\mathcal{B}_{can}(\mathbb{R}^n)\mathcal{B}_{can}(\mathbb{R}^p)}\big(Df(x)\big) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$

p lignes

n colonnes

✲ $$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \circ Dg(x)$$

✲ <u>Si $p = 1$</u> $\quad f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

(fcts à valeurs scalaires, cas le + fréquent dans ce cours) $\quad Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

(sa Jacobienne est un <u>vecteur ligne</u> :

$$\big(\partial_{x_1} f(x), \dots, \partial_{x_n} f(x)\big) \quad . \quad)$$

$\exists!$ vecteur de $\mathbb{R}^n$, noté $\nabla f(x)$ (ou $\operatorname{grad} f(x)$)

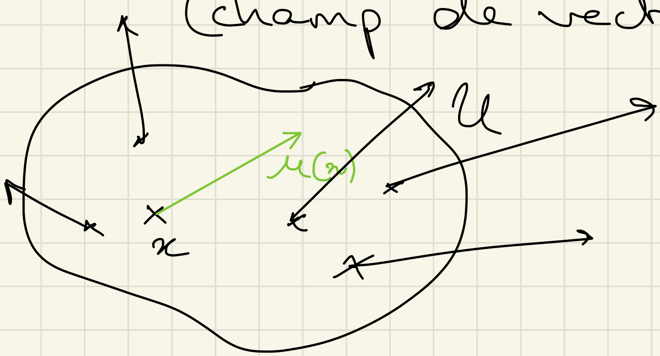
tq $Df(x)(h) = \nabla f(x) \cdot h$

↳ pdt scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cours, on identifie $\nabla f(x)$ avec ses coordonnées ds la base canonique, i-e. $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix}$

⚠ Si $p = n$: $u : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$\qquad x \longmapsto u(x)$

(champ de vecteur)



Divergence du chp de vecteurs :

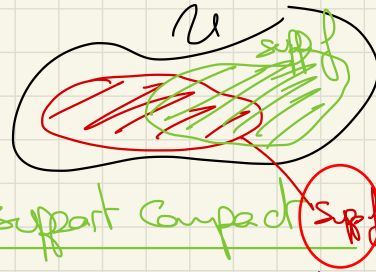
$$\mathrm{div}(u)(x) = \mathrm{Tr}(Du(x)) \quad \text{(définition intrinsèque)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x)$$

Lien entre div et ∇ ?

$u : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ chp de vecteurs

$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ scalaire tq $u \in C_c^\infty(\mathcal{U};\mathbb{R}^n)$

$f \in C_c^\infty(\mathcal{U};\mathbb{R})$



C_c^∞ : fonctions C^∞ à support compact

$\left(f \in C^0(\mathcal{U}), \ \mathrm{supp}(f) = \overline{\{x,\ f(x) \neq 0\}}, \right.$ qui est un fermé par def. $\left. \right)$

$$\int_{\mathcal{U}} \underbrace{u(x)}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot \underbrace{\nabla f(x)}_{\in \mathbb{R}^n} \underbrace{dx}_{\text{Lebesgue}} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{U}} u_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,dx$$

$\cdot$: pdt scalaire de $\mathbb{R}^n$

$$\overset{\text{IPP}}{=} \sum_{i=1}^{n} - \int_{\mathcal{U}} \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}\,dx$$

(pas de terme de bord car fcts à support cpct)

$$= - \int_{\mathcal{U}} \underbrace{\mathrm{div}(u)(x)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}}\,dx.$$

Dans ce cours, on va étudier des EDP <u>d'évolution</u> : Les fcts seront donc définies sur $\underbrace{[0,T]}_{\text{temps}} \times \underbrace{\mathbb{R}^d}_{\text{espace}}$ ou $[0,T] \times \mathcal{U}$

$\mathcal{U}$: ouvert de $\mathbb{R}^d$

on notera les variables :

$$(t, x) = (t, x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{1+d}.$$

Les opérateurs ∇ et div seront toujours pris par rapport aux variables d'espace : x

ie : $\diamond$ $f(t,x)$, $\quad \nabla f(t,x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(t,x) \\ \vdots \\ \partial_{x_d} f(t,x) \end{pmatrix}$

$t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$

$\diamond$ pour $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$(t,x) \longmapsto u(t,x)$

$$\operatorname{div}(u)(t,x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(t,x)$$

II) Equations aux derivées partielles (EDP)

$\diamond$ On va etudier des EDP d'évolution du premier ordre (i.e. contenant au plus des derivées d'ordre 1) de la forme :

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = F\left(t, x, u(t,x), \nabla u(t,x)\right) \\ \underline{t \in \mathbb{R}_+}, \ x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

$$u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$\diamond$ D'autres EDP tres interessantes (mais pas étudiées dans ce cours) prennent par ex la forme : $\diamond$ $-\Delta u = f$ (Eqn de Poisson)

$$\left(\Delta = \operatorname{div} \nabla = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right)$$

- $\partial_t u - \Delta u = 0$ (Equ de la chaleur)
- $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ (Equ des ondes)

↳ toutes trois d'ordre 2.

- On va s'intéresser au pb de Cauchy : Etant donnée une condition initiale $u_0 = u_0(x)$, on voudrait montrer qu' $\boxed{\exists !\ \text{solution de } (*)}$ telle que $\underbrace{u(0,x)}_{u|_{t=0}(x)} = u_0(x)$.

⇝ généralisation du pb de Cauchy pour les EDO (Equa. diff. Ordinaires)

Ici, difficulté supplémentaire : choix d'un espace fonctionnel (i.e. espace de fonctions) $\underline{E}$ (nécessairement de dim ∞) tq : (t étant fixé)

Si $u_0 \in E$, alors $u(t,\cdot) \in \underline{E}$, $\forall t \geq 0$ (l'application $x \longmapsto u(t,x)$)

↳ pour les EDO, $\underline{E} = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Ici,

$\underline{E} = C^0(\mathbb{R}^d)$ ou $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ou $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou

Attention ! Que signifie la dérivée d'une fonction dans ces espaces?

$L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) = \{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, mesurables tq
$\forall K$ compact de $\mathbb{R}^d$, $\int_K |f| \, dx < \infty \}$

Rem : $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ est un gros espace de fcts
$L^1_{loc} \supset C^0$, $L^1_{loc} \supset L^\infty$, $L^1_{loc} \supset L^1$

☆ Rem : Le pbm de Cauchy n'est pas toujours bien posé (et cela dépend de l'espace E choisi !)

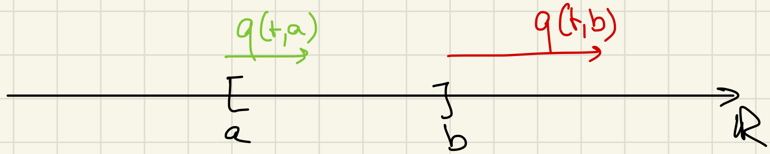
☆ Rem : Il n'existe pas de thm général satisfaisant pour montrer que $(*)$ est bien posé.
↳ nécessité d'étudier les équs au cas par cas.

III) Modélisation

Comment la physique arrive à une équation comme $(*)$: Description d'une densité $\underbrace{\rho(t,x)}_{\frac{\text{Qtité}}{\text{Volume}}}$ (de $\underbrace{\left| \begin{array}{l} \text{véhicules} \\ \text{population} \\ \text{fluide} \\ \dots \end{array} \right.}_{=: \text{choses}}$) au tps t au pt x.

1) En dimension 1 : $x \in \mathbb{R}$

Si $q(t,x)$ = débit de choses au tps t au pt x



Bilan de quantité de choses sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

$$N(t) = \int_a^b \rho(t,x)\,dx = \text{qtité de choses ds l'intervalle}$$

Conservation de la masse

Bilan $\underbrace{\frac{d}{dt} N(t)}$ $= \underbrace{q(t,a) - q(t,b)}_{\text{débit entrant ds } [a,b]}$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(t,x)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x)\,dx \qquad = -\int_a^b \partial_x q(t,x)\,dx$$

Dc $\forall\, a<b$, $\displaystyle\int_a^b (\partial_t \rho + \partial_x q)(t,x)\,dx = 0$

D'où $\partial_t \rho + \partial_x q = 0$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

bilan infinitésimal au point x

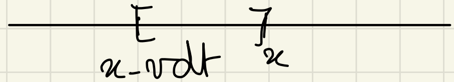
↳ une équation, deux inconnues (ρ et q) :

Le système n'est pas fermé.

Si $v(t,x)$ = vitesse des choses au tps t, pt x

Nb de choses passant par x pendant un temps dt = $q(t,x)\,dt$

et $= (\rho v)(t,x)\,dt$



↳ "toutes les choses entre $x - vdt$ et x passent par le pt x pendant dt"

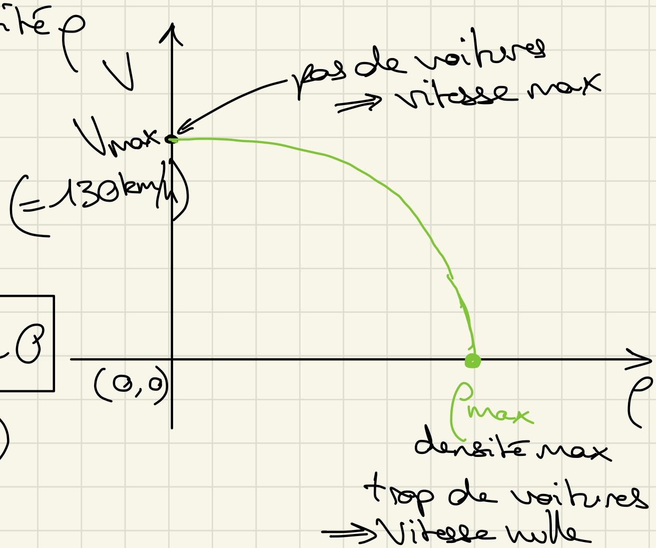
Donc $q = \rho v$.

↳ $\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0$

Mais on a toujours 2 inconnues

↳ Pour clore le système, il faut faire une hypothèse de modélisation :

- Ex : voitures sur une autoroute : La vitesse est fct du $\underbrace{\text{trafic}}_{\text{densité } \rho}$ $v = V(\rho)$



On a alors

$$\boxed{\partial_t \rho + \partial_x (\rho V(\rho)) = 0}$$

qui a la forme (*)

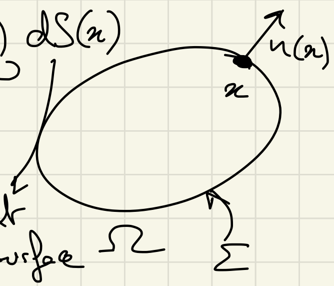
- Méca des fluides (gaz dans tuyère 1D)

v est solution d'une autre EDP d'évolution
(Système de 2 EDP du type (*)).

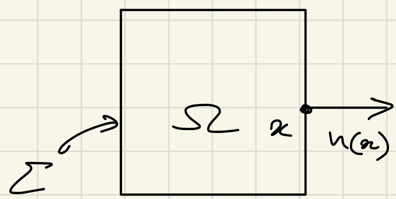
2) En dimension quelconque

↳ C'est "pareil" : le bilan doit s'écrire

✩ $$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(t,x)\,dx = -\int_\Sigma \underbrace{q(t,x)}_{\text{vecteur}}\cdot \underbrace{n(x)}_{\substack{\text{vecteur}\\ \text{normal}\\ \text{unitaire}\\ \text{sortant}}}\ \underbrace{dS(x)}_{\substack{\text{elt}\\ \text{de surface}}}$$



IPP (Formule Gauss/Green Stokes...) $$\stackrel{\downarrow}{=} -\int_\Omega \mathrm{div}(q)(t,x)\,dx$$



↳ $\partial_t \rho + \mathrm{div}(q) = 0$

✩ $q = \rho v \implies \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho v) = 0$

Puis hyp de modélisation pour clore le système !

Plan du cours

✩ Ch I : Équs de transport linéaires (à coeffs réguliers)

✩ Ch II : Équs de transport non linéaires

(lois de conservation scalaires)

Si le temps le permet ! { ∘ Ch III : Equs de transport linéaires à coeffs singuliers

---

Ch I : Equations de transport linéaires, à coefficients réguliers

Dans ce chapitre, on étudie :

$$(*)\begin{cases} \partial_t u + b(x)\cdot\nabla u = 0 & , t>0, x\in\mathbb{R}^d \\ u|_{t=0}(x) = u_0(x) & , x\in\mathbb{R}^d \end{cases}$$

$\nabla = \begin{pmatrix}\partial_{x_1}\\ \vdots \\ \partial_{x_d}\end{pmatrix}$

où
- $x\mapsto b(x)$ est un champ de vecteurs « suffisamment régulier » (donné) $b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_d(x)\end{pmatrix}$
- $u : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est | l'inconnue / l'indeterminée / la solution
- $u_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$: donnée initiale

Qn : Sous quelles conditions sur b et u_0 on a $\exists!$ solution à $(*)$??

Que peut on dire de cette solution ?

I) Cas où b est constant

On suppose $b(x) = \underbrace{b}_{\text{vecteur constant}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$.

" à tout pt x de $\mathbb{R}^d$, on associe la même direction b ".

Le 26/01/2021
Cours n°2

(Faire TD 1 sur la Convolution)
Exo 1 pour le 26/01
(Exo 2)

1) Solutions classiques

Def : On dit que u est solution classique de $(*)$

si $u \in C^1(\underbrace{]0,\infty[}_{t} \times \underbrace{\mathbb{R}^d}_{x} ; \mathbb{R}) \cap C^0([0,\infty[\times \mathbb{R}^d ; \mathbb{R})$

au tps $t=0$

et u vérifie $(*)$ ponctuellement

i.e. $\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b \cdot \nabla u(t,x) = 0 & \forall t > 0 \\ & \forall x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d . \end{cases}$

Rem : cela nécessite $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^d ; \mathbb{R})$

Thm : $\forall u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d ; \mathbb{R})$, $(*)$ possède une unique solution, donnée par $\underbrace{u(t,x)}_{\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d} = u_0(\underset{\in \mathbb{R}^d}{x} - \underset{\in \mathbb{R}}{t}\,\underset{\in \mathbb{R}^d}{b})$

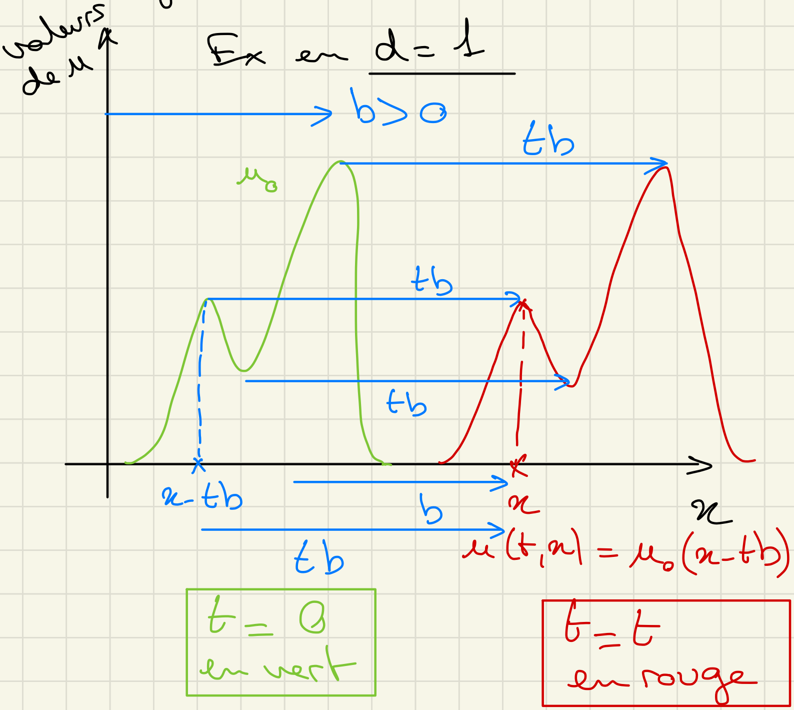
Rem : ✲ La formule donne aussi (pour $x = y + tb$)

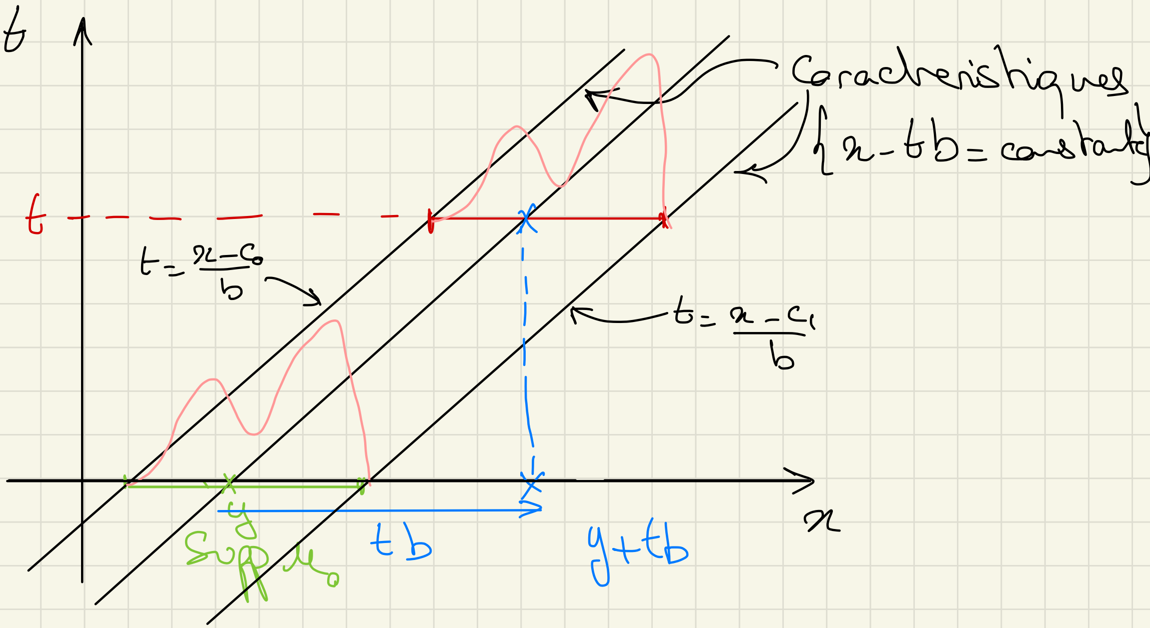
$$u(t, y+tb) = u_0(y) \quad \forall t \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

✲ Les courbes $t \longmapsto \underbrace{y+tb}_{\in \mathbb{R}^d}$, ici des demi-droites ($t \geq 0$) s'appellent les caractéristiques.

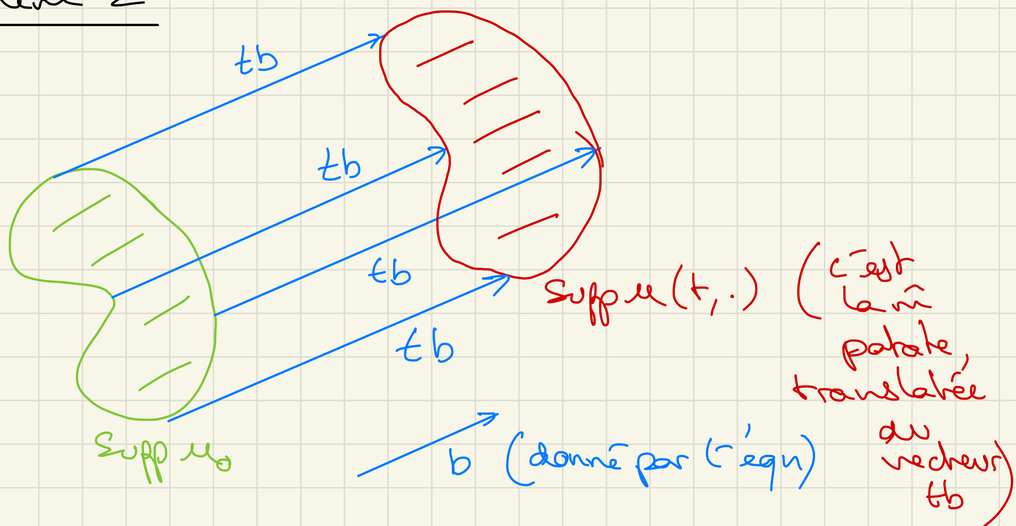
La formule dit : « la solution est constante le long des caractéristiques ».

✲ u_0 se propage/transporte sans se déformer.





En dim 2



Dém du thm : (1) Existence et formule.

On pose $u(t,x) = u_0(x - tb)$.

Alors $u : (t,x) \longrightarrow x - tb \longrightarrow u_0(x - tb)$

$\in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d ; \mathbb{R}^d)$ $\quad u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ par hyp donc $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.

* Vérifier l'eqn :

$$\partial_t u(t,x) = \partial_t \left(u_0(x - tb) \right) \underset{\uparrow}{=} \left(- b \cdot \nabla u_0 \right)(x - tb)$$

différentielle de la composée.

(en effet $t \longrightarrow x - tb \longrightarrow u_0(x-tb) = u_0 \circ \phi(t)$

$\mathbb{R} \xrightarrow[\phi]{} \mathbb{R}^d \xrightarrow[u_0]{} \mathbb{R}$)

$(t,x) \xrightarrow{\tilde{\phi}} x - tb$

$$\underbrace{\partial_t (u_0 \circ \phi)}_{d_t (u_0 \circ \phi)} = \underbrace{du_0(\phi(t))}_{(\partial_{x_1} u_0, \dots \partial_{x_d} u_0)(\phi(t))} \circ \underbrace{d\phi(t)}_{\partial_t \phi(t) = \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_d \end{pmatrix} = -b}$$

$$d(u_0 \circ \tilde{\phi}) = \left(d_t(u_0 \circ \tilde{\phi}), d_x(u_0 \circ \tilde{\phi}) \right)$$

$$= - \sum_{j=1}^{d} b_j \partial_{x_j} u_0 (x - tb)$$

$$= -(b \cdot \nabla u_0)(x - tb)$$)

et $b \cdot \nabla u(t,x) = b \cdot \nabla \left(u_0(x - tb) \right) = (b \cdot \nabla u_0)(x - tb)$

Si on somme :

$$\partial_t u(t,x) + b \cdot \nabla u(t,x) = (-b \cdot \nabla u_0)(x - tb) + (b \cdot \nabla u_0)(x - tb) = 0$$

donc ce u vérifie l'eqn.

De plus $u(0,x) = u_0(x - 0) = u_0(x)$.

D'où existence d'une sol classique + formule.

② Unicité

: Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (*), par linéarité, $v = u_1 - u_2$ est sol de

$$(\heartsuit) \begin{cases} \partial_t v + b.\nabla v = 0 & (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}^d \\ v(0,x) = 0 & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

Donc $v(t, x+tb)$ vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v(t, x+tb)\right) \underset{\uparrow}{=} (\partial_t v)(t, x+tb) + (b.\nabla_x v)(t, x+tb)$$

composition différentielles $= 0$ car $(\heartsuit)$

(en effet, à x fixé

$$t \overset{\psi}{\longmapsto} (t, x+tb) \overset{v}{\longmapsto} v(t, x+tb)$$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \xrightarrow[v]{} \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(v\circ\psi(t)\right) = \underbrace{dv(\psi(t))}_{(\partial_t v,\, d_x v)(\psi(t))} \circ \underbrace{d\psi(t)}_{\partial_t\psi} \qquad \partial_t\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

$$(\partial_t v, \partial_{x_1} v \dots \partial_{x_d} v)(\psi(t))$$

$$= \partial_t v(\psi(t)) + \sum_{j=1}^{d} b_j \partial_{x_j} v(\psi(t))$$

$$= \partial_t v(t, x+tb) + (b.\nabla v)(t, x+tb)$$
)

Donc $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$, $v(t, x+tb) = v(0, x+0)$
$= v(0,x)$
$\overset{(\heartsuit)}{=} 0$

Donc $\forall (t,y) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ $v(t,y) = 0$

Donc $u_1 = u_2$ et l'unicité !

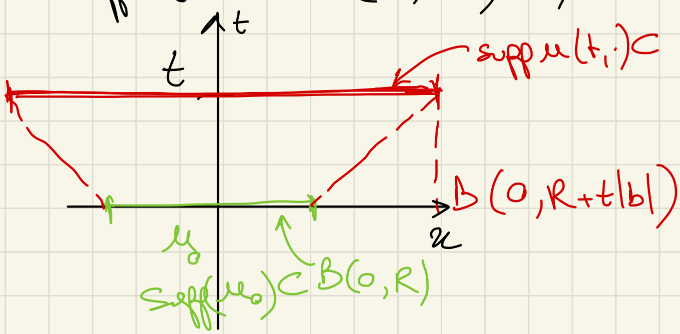
<u>Propriétés qualitatives :</u> (qui découlent directement de la formule) :

- principe du maximum : Si $\underbrace{a_1}_{\in \mathbb{R}} \leq u_0 \leq \underbrace{a_2}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^d$, alors

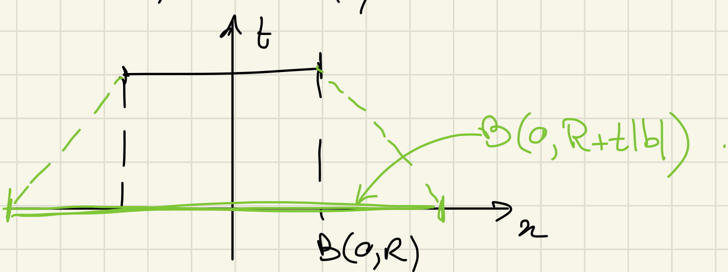
$$\forall t \geq 0, \quad a_1 \leq u(t,\cdot) \leq a_2 .$$

- Propagation à vitesse finie : si

$\operatorname{supp} u_0 \subset B(0,R)$, alors $\operatorname{supp}(u(t,\cdot)) \subset B(0, R + t\underbrace{|b|}_{\text{norme euclidienne ds } \mathbb{R}^d})$



- Domaine de dependance : $u(t,\cdot)$ ds la boule $B(0,R)$ ne depd que de u_0 ds $B(0, R+t|b|)$:



Equation avec terme source :

$$\begin{cases} \partial_t u + b\cdot\nabla u = \underbrace{f(t,x)}_{\text{donné}} \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

Thm : $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d;\mathbb{R})$

alors $\exists!$ solution classique, donnée par

$$u(t,x) = u_0(x-tb) + \int_0^t f(s, x-b(t-s))\,ds$$

Dem : exo (cf TD2).

2/02/2021
Cours n°3

2) Solutions faibles

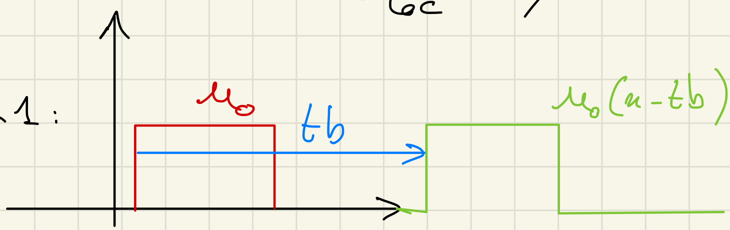
Rem clé : l'expression explicite

$$u(t,x) = u_0(x-bt)$$

est bien définie même si u_0 n'a pas de régularité. Par ex : $u_0 \in L^\infty$ ou $u_0 \in L^1$

ou même $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

ex :
en dim 1 :



On aimerait que cette formule $\underbrace{\text{cette formule}}_{u(t,x) = u_0(x-tb)}$ définisse une "solution généralisée" de $(*)$.

$\rightsquigarrow$ Notion de "dérivée faible" d'une fct L^∞, L^1_{loc}

Def : Soit $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, On dit que u est une solution $\boxed{\text{faible}}$ de $(*)$ (i.e.

$$(*) \begin{cases} \partial_t u + b.\nabla u = 0 & t>0,\ x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

)

Si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u(t,x)\big(\partial_t \varphi + b.\nabla\varphi\big)(t,x)\,dt\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx = 0$$

terme de bord en temps

$$\forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d).$$

Rem :

- tout a un sens ici $\begin{cases} \varphi \in C^1_c \Rightarrow \partial_t\varphi,\ b.\nabla\varphi \text{ OK} \\ \text{Ce qui est sous l'intégrale est intégrable car} \\ \text{"} L^1_{loc} \times C^0_c \subset L^1 \text{"} \end{cases}$

- φ a le rôle d'une "fonction test"
  l'eqn $\int$ doit ê vraie $\forall \varphi$

<u>Qn Naturelle</u> : Cette définition est elle pertinente ?

Ici : parachutée. Pour qu'une notion de "solution généralisée" soit raisonnable, il est souhaitable/nécessaire que les propriétés suivantes soient vérifiées :

en un sens généralisé

doit généraliser

1. Toute solution classique est solution faible
2. Toute solution faible <u>et</u> régulière est une solution classique

qui a la régularité suffisante pour ê une sol classique

i.e. $u \in C^1(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d) \cap C^0([0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$

$\simeq$ "dérivabilité"

C^∞ + régulier que C^{10}

C^{10} + régulier que C^1

C^1 ——— C^0

C^0 ——— $\underbrace{L^\infty \text{ ou } L^1_{loc}}_{\text{pas régulier !}}$

Plan :
- Mq c'est une bonne déf !
- Mq $u_0 \in L^1_{loc}$ donné, $\exists !$ sol $\underbrace{\text{faible}}_{u(t,x) = u_0(x-tb)}$!

9/02/2021
Cours n°4.

① Prop : Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et u une solution classique de (*) associée à u_0. Alors u est sol faible de (*)

i.e. toute sol classique est sol faible (ouf!!).

Dem : u sol classique : $u \in C^1(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d) \cap C^0([0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$
$\subset L^1_{loc}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$

De plus, $\partial_t u(t,x) + b\cdot\nabla u(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$

On multiplie cette identité par une fct test $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ et on $\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d}$:

IPP en t

IPP en x

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u + b\cdot\nabla u)(t,x)\,\varphi(t,x)\,dx\,dt.$$

Idée : IPP pour faire pour faire porter les dérivées sur φ !

IPP

Soit $T>0$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset [-T,T]\times\mathbb{R}^d$.

IPP en t sur 1er terme

$$0 = \left[\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\varphi(t,x)\,dx\right]_{t=0}^{T} - \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} u\,\partial_t\varphi\,dx\,dt$$

IPP en x sur 2e terme

$$- \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\,\underbrace{\operatorname{div}(b\varphi)}_{b\cdot\nabla\varphi}(t,x)\,dx\,dt$$

$= \sum b_j \partial_j \varphi$ car b indep de x

$$0 = -\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{u(0,x)}_{u_0(x) \text{ par hyp.}} \varphi(0,x)\,dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u\,(\partial_t \varphi + b \cdot \nabla \varphi)\,dx\,dt$$

Donc u est sol faible de $(*)$ ∎

Rem : C'est ce calcul d'IPP qui ~~motive~~ précède la definition en fait !

Donc la def de sol. faible est bien une "generalisat°" de la def de sol forte.

② **Prop** : Si u est sol faible de $(*)$ et tq

$u \in C^1(]0,\infty[\times \mathbb{R}^d) \cap C^0([0,\infty[\times \mathbb{R}^d)$.

Alors, u est solution classique de $(*)$.

La preuve de cette proposit° repose sur le lemme (super-important) suivant :

propriété de l'intégrale de Lebesgue

Lemme : Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ tq

(H) $\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}$

Alors $f = 0$ pp.

signifie "f est nulle au sens faible"

La preuve de ce lemme super-important repose sur le : lissage d'une fonction L1 par convolution

Sous-lemme : Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tq $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$

et $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ (Approx de l'id.)

Alors, $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a

- $\rho_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$
- $\|\rho_\varepsilon * f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$
- $\|\rho_\varepsilon * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

(où $\rho_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y) f(y) dy$).

Dem du sous-lemme : TD1.

(Montre en particulier $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ dense ds L^1)

Dem de Sous-lemme $\Longrightarrow$ Lemme :

On a $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et ρ_ε cô ci-dessus.

Pour tout x (fixé) $\in \mathbb{R}^d$, on regarde :

$$\rho_\varepsilon * (\underbrace{\chi f}_{\in L^1})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{f(y)}_{L^1_{loc}} \underbrace{\chi(y) \rho_\varepsilon(x-y)}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ en } y} dy$$

donc par (H), $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $\rho_\varepsilon * (\chi f)(x) = 0$

Or $\| \underbrace{\rho_\varepsilon * (\chi f)}_{= 0 \ \forall \varepsilon > 0} - \chi f \|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Donc $\chi f = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{de } L^1(\mathbb{R}^d) \\ \text{i.e. } = 0 \text{ pp} \end{array} \right.$

Mais ceci vrai $\forall \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc finalement

$f = 0$ pp sur $\mathbb{R}^d$ ∎

Reste à démontrer la propositⁿ (grâce au lemme)

<u>Dem de la prop</u> :

nulle près de 0.

1) on choisit tout d'abord $\varphi \in C_c^\infty(]0,\infty[\times \mathbb{R}^d)$

vérificaⁿ de $\partial_t u + b.\nabla u = 0$

On a alors (def de sol faible) :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x) \left(\partial_t \varphi + b.\nabla\varphi \right)(t,x) + 0 = 0$$

En intégrant par parties, on obtient

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_t u + b.\nabla u \right) \varphi \, dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(]0,\infty[\times \mathbb{R}^d)$$

D'après le lemme super-important on déduit

$$\partial_t u + b.\nabla u = 0 \quad \text{pp } (t,x) \in]0,\infty[\times \mathbb{R}^d$$

or $\underbrace{\partial_t u + b\cdot\nabla u}_{\in C^0(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)} = 0$ pp(t,x) $\Downarrow$ $\forall (t,x)$.

donc l'équ est satisfaite.

Qu restante : Condition initiale ?

2) vérificat° de $u(0,x) = u_0(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, la m̂ IPP dans

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u(t,x)(\partial_t\varphi + b\cdot\nabla\varphi)(t,x)\,dx\,dt}_{} + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx = 0$$

$\left[\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\varphi(t,x)\,dx\right]_0^T$ T tq supp $\varphi \subset [-T,T]\times\mathbb{R}^d$

$$= -\int_{\mathbb{R}^d} u(0,x)\varphi(0,x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d} (\partial_t u + b\cdot\nabla u)\varphi\,dx\,dt$$

$= 0$ d'après le 1) !

Donc $\int_{\mathbb{R}^d} [u_0(x) - u(0,x)]\varphi(0,x)\,dx = 0$ $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$

On en déduit $\int_{\mathbb{R}^d} (u_0(x) - u(0,x))\psi(x)\,dx = 0$ $\forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

(en effet $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varphi(t,x) = \underbrace{\chi(t)\psi(x)}_{\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{1+d})}$

et $\varphi(0,x) = \psi(x)$ si $\chi(0) = 1$)

Grâce au lemme super-important (super-lemme terminologie Antonio) on déduit $\underbrace{u_0(x)}_{\substack{\in C^0(\mathbb{R}^d) \\ \text{par hyp}}} = \underbrace{u(0,x)}_{\in C^0(\mathbb{R}^d) \text{ par hyp.}}$ pp $x \in \mathbb{R}^d$ → $\forall x \in \mathbb{R}^d$

finalement u est une sol. forte ! ∎

Thm : Soit $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $\exists !$ solution faible u de $(*)$ donnée explicitement par

$$u(t,x) = u_0(x - tb)$$

Dem : 1) "Existence et formule" :

☆ "Regularité" : Mq $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.

u mesurable car $(t,x) \xrightarrow[C^\infty]{} x - tb \xrightarrow[L^1_{loc}]{} u_0(x-tb)$

et
$$\int_{[0,T]\times\overline{B}(0,R)} |u| = \int_0^T \int_{\overline{B}(0,R)} |u_0(\underbrace{x-tb}_{y = x-tb})| \,dx\,dt$$

$$= \int_0^T \int_{\underbrace{\overline{B}(0,R)-tb}_{\forall t\in[0,T],\ \overline{B}(0,R)-tb \subset \overline{B}(0,R+T|b|)}} |u_0(y)| \,dy\,dt.$$

$$\leq \int_0^T \int_{\overline{B}(0,R+T|b|)} u_0(y)\,dy\,dt = T \int_{\overline{B}(0,R+T|b|)} |u_0| < \infty$$

car $u_0 \in L^1_{loc}$

Donc u (défini par la formule) est $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$

* "Eqn" : On vérifie que $u(t,x) = u_0(x-tb)$ est sol faible :

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u_0(x-tb)\left(\partial_t\varphi + b.\nabla\varphi\right)(t,x)\,dx\,dt$$

$$\underset{\substack{y = x-tb \\ dy = dx \\ \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d}}{=} \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u_0(y)\underbrace{\left(\partial_t\varphi + b.\nabla\varphi\right)(t,y+tb)}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(t,y+tb)\right)}\,dy\,dt$$

$$= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi(t,y+tb)\right)dy\,dt$$

$$\underset{\text{intégrat en } t}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\,\varphi(0,y)\,dy\,.$$

Donc u est bien une sol faible !

2) Unicité : Si u_1, u_2 sont deux sols faibles de $(*)$, alors $v = u_2 - u_1$ est sol faible de

$$\begin{cases} \partial_t v + b.\nabla v = 0 \\ v|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\boxed{v \in L^1_{loc} \quad \& \quad \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} v\left(\partial_t\varphi + b.\nabla\varphi\right)dx\,dt = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \quad (1)$$

But : Mq $v = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{On va montrer que } \forall \psi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d), \\ \exists \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d) \text{ tq } \partial_t \varphi + b\cdot\nabla\varphi = \psi \text{ sur } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\end{array}}\ (2)$$

Si on fait ça $(1) \Longrightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} v\,\psi\, dx dt = 0 \quad \forall \psi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$

$\Longrightarrow v = 0$ pp. d'où l'unicité.

Lemme super-important ⟸ Rem : Lemme : $\forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$
Mais $C_c^\infty \subset C_c^1$: Le lemme est + fort !

Pour montrer (2), on montre que $\forall \psi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$
$\exists \varphi_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ tq la solution classique de

$$(S)\begin{cases} \partial_t \varphi + b\cdot\nabla\varphi = \psi \text{ sur } \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d \\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \end{cases}$$

soit ds $C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$

On sait (cf thm montré ds le TD2) que la solution de (S) s'écrit :

$$\varphi(t,x) = \varphi_0(x-tb) + \int_0^t \psi(s, x-(t-s)b)\,ds.$$

Soit $T>0$ tq $\operatorname{supp}\psi \subset [-T,T]\times\mathbb{R}^d$.
On choisit φ_0 tq $\varphi(T,\cdot) = 0$ sur $\mathbb{R}^d$,
c'est à dire : $\varphi_0(x-Tb) = -\displaystyle\int_0^T \psi(s, x-(T-s)b)\,ds$

i.e. $\varphi_0(y) := -\int_0^T \psi(s, y+sb)\, ds$

On a bien alors $\varphi_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ (derivation sous $\int$ et supp de ψ)

Avec ce choix de φ_0, $\varphi(T,\cdot) = 0$ et $x \to \varphi(T,x)$

donc φ résout $\begin{cases} \partial_t \varphi + b\cdot\nabla\varphi = 0 & t \geq T, x\in\mathbb{R}^d \\ \varphi(T) = 0 \end{cases}$

Donc par unicité des solutions fortes de $(*)$, $\varphi \equiv 0$ sur $t \geq T$

NB: par ailleurs, φ ne doit pas satisfaire d'eqn pr $t<0$, donc on peut la tronquer avec $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\begin{cases} \chi = 1 \text{ sur } [-\frac{1}{2}, \infty[\\ \chi = 0 \text{ sur }]-\infty, -1] \end{cases}$

On a finalement $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ qui résout (S) $\blacksquare$

Rem: Toutes les ptés qualitatives (principe du max, support, domaine de dependance) restent vraies pour les sols faibles grâce à la formule explicite.

Pour semaine prochaine $\to$ TD 2.
$\to$ Reviser Cauchy-Lipschitz

Rem : Sol faible qui n'est pas sol classique ?

Soit $\boxed{u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \setminus C^1(\mathbb{R}^d)}$;

Alors $u(t,x) = u_0(x - tb)$ est sol faible mais pas sol classique

par ex $u_0 = \mathbb{1}_{[0,1]}$, $u_0 = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ ...

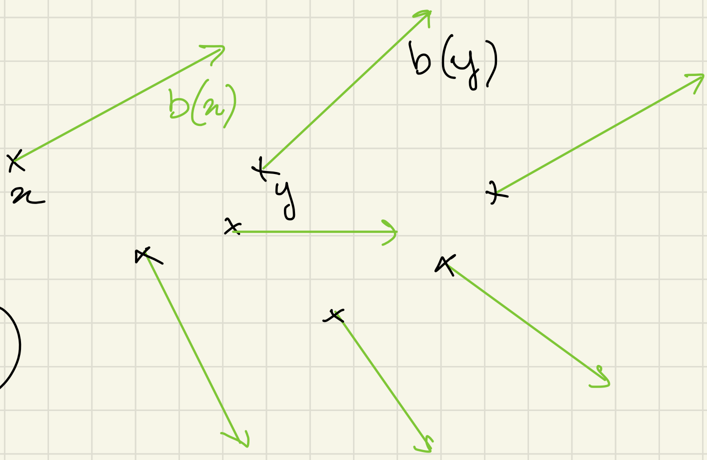
16/02/21
Cours n°6

II Cas des chps de vecteurs variables

(et/mais réguliers) ?

Ici, $b = b(x)$ $\quad b : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

b ne dépend pas du temps. (chp de vecteurs Autonome)



b Régulier ?

Déf : ☆ $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} , \exists$
$C, L > 0$ tq $|f(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^d \}$

= fonction bornées (globalement) Lipschitziennes

"Borné" ☆ $C^1_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}) = \{ f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}),$
$\exists C, M > 0$ tq $\begin{cases} |f(x)| \leq C \\ |\partial_{x_j} f(x)| \leq M \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}^d \}$

☆ $b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ (resp. $C^1_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$)
si toutes ses composantes sont $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$
(resp. $C^1_b(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$).

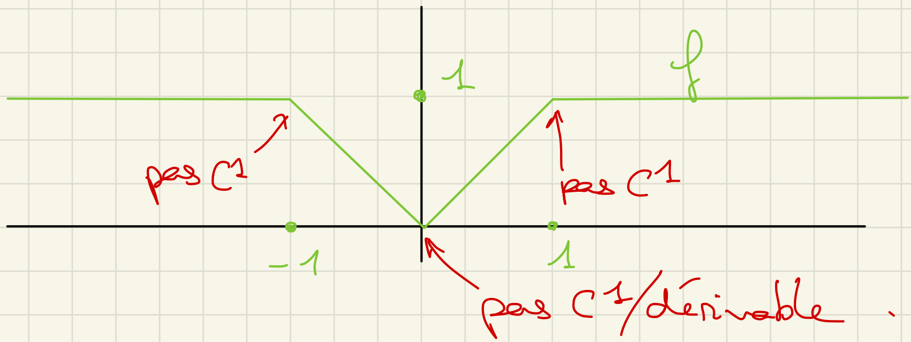
NB : Ces espaces contiennent de l'info jusqu'à l'infini (Bornes uniformes sur $\mathbb{R}^d$).

NB : ☆ $C^1_b \subset W^{1,\infty}$ d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|f(x) - f(y)| \leq \underbrace{\left(\sup_{\mathbb{R}^d} |\nabla f|\right)}_{\leq M \text{ si } f \in C^1_b} |x-y| .$$

★ $W^{1,\infty} \not\subset C^1_b$, par ex :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: $f(x) = \min(1, |x|)$



1) Rappels d'equa-diff et flot d'un chp de vect

Thm (Cauchy – Lipschitz, version globale) :

Si $b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, alors $\forall y \in \mathbb{R}^d$ (donnée initiale), $\exists!\ x : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ t \longmapsto x(t) \end{array}$

tq $x \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^d)$ et $(*) \begin{cases} \dot{x}(t) = b(x(t)) \ \forall t \in \mathbb{R}. \\ x(0) = y \end{cases}$

Rem : ★ b localement Lipschitz $\overset{\text{Cauchy-Lipschitz local}}{\Longrightarrow}$ $\exists!$ sol définie localement au voisinage de $t=0$ (i.e. sur $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$)

★ Puis b bornée globalement dc

$|x(t) - \overbrace{x(0)}^{y}| = \left| \int_0^t b(x(s))ds \right|$ ← norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$

$$\leq \int_0^t \underbrace{|b(x(s))|}_{\leq \|b\|_{L^\infty}} ds \leq t\|b\|_{L^\infty}$$

Donc $|x(t)| \leq |y| + t\|b\|_{L^\infty}$ $t \geq 0$

$|x(t)| \leq |y| + |t|\,\|b\|_{L^\infty}$, $t \leq 0$

$\Rightarrow$ Pas d'explosion en tps fini

(pas de "sortie de tt cpct", "lemme des Bouts"...)

$\hookrightarrow$ existence globale $\forall t \in \mathbb{R}$.

On peut noter $X(t,y) = x(t)$ la solution de (*) au temps t, issue de la donnée y au tps 0.

i.e. on restaure la dependance de la sol$^{\underline{O}}$ par rapport à la donnée initiale y.

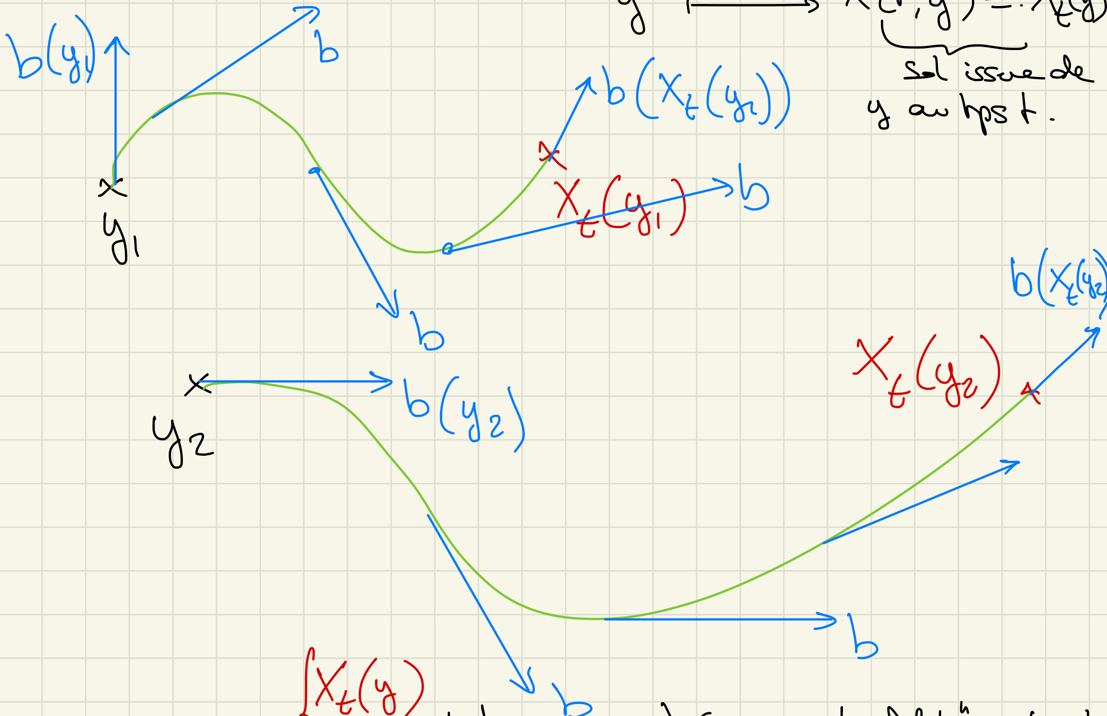
Autrement dit :
$$X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ (t, y) & \longmapsto & X(t,y) \end{array}$$

est la sol de
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} X(t,y) = b(X(t,y)) \\ X(0,y) = y \end{cases}$$

au temps t.

On notera aussi $X_t = X(t,\cdot)$: Ici on fixe le temps t et on regarde l'application

$$X_t = X(t,\cdot) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ y & \longmapsto & \underbrace{X(t,y)}_{\text{sol issue de } y \text{ au tps } t} =: X_t(y) \end{array}$$



$X_t : y \longrightarrow \begin{cases} X_t(y) \\ \text{son « transporté par le flot » au tps } t \end{cases}$

On appelle l'application X_t (ou peut-être $X(\cdot,\cdot)$...) le flot du chp de vecteur b

Thm : Soit $b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$:

- $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2$, $X_t \circ X_s = X_{t+s}$
- $\forall t \in \mathbb{R}$, l'application $X_t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est Lipschitzienne.
- Si de plus $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ alors

$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe C^1
(et en particulier $\forall t$ $X_t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est C^1)

Rem : ds le cas $b \in C^1_b$, on rem que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} X_t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \text{ est } C^1 \\ X_{-t} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \text{ est } C^1 \\ X_t \circ X_{-t} = X_0 = Id_{\mathbb{R}^d} = X_{-t} \circ X_t \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Donc } X_t \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme d'inverse } (X_t)^{-1} = X_{-t}.}$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un gpe à 1 paramètre de difféomorphism.

Nb : la propriété "de flot" $X_t \circ X_s = X_{t+s}$ n'est vraie que si le chp de vect b est autonome (indep de t, ce qui est le cas ici).

Dem (des 2 premiers pts seulement, on admet le troisième) :

1) $X_t \circ X_s = X_{t+s}$: Soit $y \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$x_1(t) = X_t \circ X_s(y) = \underbrace{X(t, \underbrace{X(s,y)}_{\text{résout l'EDO pdt un tps } s \text{ à partir de } y})}_{\text{puis résout l'EDO pdt un tps } t \text{ à partir du point } X(s,y)}.$$

et $x_2(t) = X_{t+s}(y) = \underbrace{X(t+s, y)}_{\text{resout l'EDO pdt un tps } t+s \text{ à partir de } y}$

On a $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \partial_t\left(X(t, X(s,y))\right) \\ \quad = b\left(X(t, X(s,y))\right) \text{ par def de } b \\ \quad = b(x_1(t)) \\ \text{et } x_1(0) = X(0, X(s,y)) = X(s,y) \end{cases}$

et $\begin{cases} \dot{x}_2(t) = \partial_t\left(X(t+s, y)\right) \\ \quad = (\partial_t X)(t+s, y) = b(X(t+s, y)) \\ \quad = b(x_2(t)) \\ \text{et } x_2(0) = X(0+s, y) = X(s, y) \end{cases}$

Donc x_1 et x_2 sont sol du m̂ pbm de Cauchy

donc (unicité ds Cauchy-Lipschitz)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_1(t) = x_2(t)$$

$$X_t \circ X_s(y) = X_{t+s}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d.$$

2) Caractère Lipschitz de $X_t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$.

On a $\partial_t X(t,y) = b(X(t,y))$, $X(0,y) = y$

Dc $X(t,y) = \underbrace{X(0,y)}_{y} + \int_0^t b(X(\sigma, y))\, d\sigma$

$$X(t,y_1) - X(t,y_2) = y_1 - y_2 + \int_0^t b(X(\sigma,y_1)) - b(X(\sigma,y_2))\, d\sigma$$

Mais b est Lipschitz :

$$\underbrace{|X(t,y_1) - X(t,y_2)|}_{v(t)} \leq \underbrace{|y_1 - y_2|}_{A} + \int_0^t L \underbrace{|X(\sigma,y_1) - X(\sigma,y_2)|}_{v(\sigma)} d\sigma$$

$t \geq 0$ ($t \leq 0$ idem ...)

C'est une inégalité du type $v(t) \leq A + L\int_0^t v(s)\,ds$

On va déduire la Lipschitzianitude de $X(t,\cdot) = X_t$ par un lemme de Grönwall ad-hoc.

Lemme (Grönwall ad-hoc) : Soit $A \geq 0$, $L \geq 0$ et $v : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tq $\boxed{v(t) \leq A + L\int_0^t v(s)\,ds}$ $\forall t \geq 0$. Alors $\boxed{v(t) \leq (1 + e^{Lt})A}$ $\forall t \geq 0$

Inégalité Intégrale (différentielle) → information implicite

Info explicite sur v.

Dem du lemme :

On pose $\varphi(t) = \int_0^t v(s)\,ds \in C^1(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$

et $\dot{\varphi}(t) = v(t) \underset{\text{Hyp}}{\leq} A + L\varphi(t)$ ← Inégalité différentielle

i.e $\dot{\varphi} - L\varphi \leq A$.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Lt}\varphi\right) \leq e^{-Lt} A$$

Donc $e^{-Lt}\varphi(t) - \underbrace{\varphi(0)}_{0} \leq \underbrace{\int_0^t e^{-L\sigma} A\, d\sigma}_{\frac{A}{L}(1-e^{-Lt}) \leq \frac{A}{L}}$

Donc $\varphi(t) \leq \frac{A}{L} e^{Lt}$

$\boxed{\text{Hyp}} \Rightarrow \quad v(t) \leq A + L\varphi(t) \leq A(1+e^{Lt})$ ∎

Appliqué à notre pbm, Gronwall donne :

$$|X(t,y_1) - X(t,y_2)| \leq |y_1 - y_2| (1 + e^{Lt})$$

Donc X_t est $(1+e^{Lt})$-Lipschitz ! ∎

2) Solutions fortes de l'eqn de transport.

$$(*) \begin{cases} \partial_t u + b(x)\cdot \nabla u = 0 & (t,x) \in]0,\infty[\times \mathbb{R}^d \\ u\big|_{t=0} = u_0 & \text{ds } \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

où l'inconnue est $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$

Maintenant, $b = b(x)$ est variable.

Cô ds le cas $b = $ cst, on dit que u est sol (forte ou classique) si $u \in C^1(]0,\infty[\times \mathbb{R}^d) \cap C^0([0,\infty[\times \mathbb{R}^d)$ et résout (♡) en tout tps $t>0$, pt $x \in \mathbb{R}^d$

Thm : Si $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$: $\forall u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$,

$\exists !\ u \in C^1(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d) \cap C^0([0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$ solution classique de $(*)$, donnée explicitement par $u(t,x) = u_0(X_{-t}(x))$

Rem : généralise le cas $b = cte$ car ds ce cas $X_t(x) = x + tb$: sol de

$$\left.\begin{cases} \partial_t X_t(x) = b & \text{indep de } x. \\ X_0(x) = x \end{cases}\right\} \Rightarrow X_t(x) = x + tb$$

Dém : On utilise le flot du chp de vect. b défini par

$$(**)\begin{cases} \partial_t X(t,x) = b(X(t,x)) \\ X(0,x) = x \end{cases}$$

$X_t(x) = X(t,x)$ (notation)

1) ~~Existence~~ et formule : il suffit de vérifier que $u(t,x) := u_0(X_{-t}(x))$ est solution classique de $(*)$. Cette fct a la bonne regularité car $(t,x) \to X(t,x)$ est $C^1(\mathbb{R}^{1+d};\mathbb{R}^d)$ et $u_0 \in C^1$.

16/03/2021

* $u(0,x) = u_0(\underbrace{X_{-0}(x)}_{x})$ (Rappel : DM pr le 23/03)

$= u_0(x)$ donc cond. initiale OK.

* Pour vérifier l'équation, on regarde

$$(\heartsuit) \quad u(t, X_t(x)) = u_0(X_{-t}(X_t(x))) = \underbrace{u_0(x)}_{\text{indep de } t.}$$

On calcule

$$\partial_t(u(t, X_t(x))) = (\partial_t u)(t, X_t(x)) + d_x u(t, X_t(x)) \cdot \underbrace{\partial_t X_t(x)}_{b(X_t(x))}$$

$$= (\partial_t u)(t, X_t(x)) + b(X_t(x)) \cdot (\nabla u)(t, X_t(x))$$

Si u est donnée par $(\heartsuit)$, alors $\partial_t u_0(x) = 0$

D'où $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on a

$$(\partial_t u)(t, X_t(x)) + b(X_t(x)) \cdot \nabla u(t, X_t(x)) \overset{(\heartsuit)}{=} 0$$

On $y = X_t(x)$ $\quad (X_t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ difféo global$)$

$$\partial_t u(t,y) + b(y) \cdot \nabla u(t,y) = 0 \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

Donc $u(t,x) = u_0(X_{-t}(x))$ est bien une

solu° de $(*)$.

2) Unicité ? On suppose $u(t,x)$ sol $C^1(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d) \cap C^0([0;\infty[\times\mathbb{R}^d)$ de

$$(*)\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(x).\nabla u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

On s'intéresse à $u(t, X_t(x))$:

$$\partial_t\big(u(t,X_t(x))\big) = (\partial_t u)(t,X_t(x)) + b(X_t(x)).\nabla u(t,X_t(x)) \underset{u \text{ sol de } (*)}{=} 0$$

donc $t \to u(t,X_t(x))$ est cste

donc $u(t,X_t(x)) = u_0(x) \quad \forall t>0 \ \forall x\in\mathbb{R}^d$

donc $u(t,y) = u_0(X_{-t}(y))$ nécessairement

d'où l'unicité ∎

3) Solutions faibles

Même philosophie que lorsque $b = cst$:

$u_0 \circ X_{-t}(x)$ a un sens m̂ si $u_0 \in L^1_{loc}$.

↳ en quel sens ceci est une sol "faible" de $(*)$??

Déf : Soit $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On dit que u est solution faible de (*) si :

$u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et $\forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} u \left(\partial_t \varphi + b \cdot \nabla \varphi + (\operatorname{div} b)\varphi\right) dx\, dt = - \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(0,x)\, dx$$

Rem : ☆ (Exo) : il faut vérifier la cohérence de la définition : ☆ Toute sol forte est sol faible.

☆ Sol faible + regulière est solution forte.

(À faire, pareil que ds le cas $b = \text{cst}$)

(i.e. fort $\Rightarrow$ faible
$(\text{faible} + \underbrace{\text{régulier}}_{\text{ici: } C^1}) \Rightarrow \text{fort}$)

☆ D'où vient le div b ?

$$\int_{\mathbb{R}^d} b(x) \cdot \nabla u(t,x) \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} (\varphi(x) b(x)) \cdot \nabla u(t,x)\, dx$$

IPP

C^1_c dc pas de termes de bord

$$\underset{\text{IPP}}{=} - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}(\varphi(x) b(x))\, u(t,x)\, dx$$

$$= - \int \left(\nabla \varphi(x) \cdot b(x) + \underbrace{\varphi(x) \operatorname{div} b(x)}_{\substack{\text{nouveau terme} \\ \text{par rapport au cas } b = \text{cst}}}\right) u(t,x)\, dx$$

Thm : Si $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$\exists !$ u sol faible de $(*)$ (au sens de la def précédente), explicitement donnée par :

$$u(t,x) = u_0(X_{-t}(x)).$$

Dem : 1) <u>Existence/Formule</u> : Soit $u(t,x) = u_0(X_{-t}(x))$

Mq u est sol faible :

$\triangle$ $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$? mesurable ok et

$$\int_{[0,T]\times B(0,R)} |u_0(X_{-t}(x))| \, dx \, dt \overset{\text{☺}}{=} \int_0^T \int_{X_{-t}(B(0,R))} |u_0(y)| \, |J_t(y)| \, dy \, dt$$

$y = X_{-t}(x)$

$X_t(y) = x$

$$dx = \underbrace{|\det d_x X_t(y)|}_{|J_t(y)|} dy \quad \text{TD3}$$

et on a vu (TD3) que

$$J_t(x) = e^{\int_0^t \operatorname{div}(b)(X_s(x))\,ds} \longleftarrow \begin{cases} J_t'(x) = \operatorname{div}(b)(X_t(x))\, J_t(x) \\ J_0(y) = 1 \end{cases}$$

TD3

En particulier $\operatorname{div} b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ car $b \in C_b^1$

et $|J_t(x)| \leq e^{t \|\operatorname{div} b\|_{L^\infty}}$

De plus, $b \in L^\infty$, $\quad |X_{\pm t}(x)| \leq |x| + t\|b\|_{L^\infty}$

Donc $\quad X_{-t}(B(0,R)) \subset B(0, R+|t|\|b\|_{L^\infty})$

car $\quad X_t(x)$ sol de $\begin{cases} \partial_t X_t(x) = b(X_t(x)) \\ X_0(x) = x \end{cases}$ on intègre $\int_0^\tau$

$$\underbrace{\int_0^\tau \partial_t X_t(x)\,dt}_{X_\tau(x) - \underbrace{X_0(x)}_{x}} = \int_0^\tau b(X_t(x))\,dt$$

(|.| norme eucl. sur $\mathbb{R}^d$)

$$|X_\tau(x) - x| \leq \int_0^\tau \underbrace{|b(X_t(x))|}_{\leq \|b\|_{L^\infty}}\,dt \qquad (\tau \geq 0)$$

$$\leq \tau \|b\|_{L^\infty}$$

D'où $\quad |X_\tau(x)| \leq |x| + \tau \|b\|_{L^\infty}$

De retour à ( ), on a obtenu

$$\int_{[0,T]\times B(0,R)} |u_0(X_{-t}(x))|\,dx\,dt \leq \int_0^T \int_{B(0,R+T\|b\|_\infty)} |u_0(y)|\,e^{T\|\operatorname{div} b\|_\infty}\,dy\,dt$$

$$\leq T e^{T\|\operatorname{div} b\|_\infty} \int_{B(0,R+T\|b\|_\infty)} |u_0(y)|\,dy < +\infty$$

car $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

* u est sol faible de l'eqn :

Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$:

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} \underbrace{u(t,x)}_{u_0(X_{-t}(x))} \left(\partial_t \varphi + b.\nabla\varphi + \operatorname{div}(b)\varphi\right)(t,x)\,dt\,dx$$

on pose $y = X_{-t}(x)$

$dx = |J_t(y)|dy$

$= J_t(y)dy$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\left[\partial_t\varphi + b.\nabla\varphi + (\operatorname{div} b)\varphi\right](t, X_t(y))\,J_t(y)\,dy\,dt$$

Rem : $\partial_t\left(\varphi(t,X_t(y))\right) = (\partial_t\varphi)(t,X_t(y)) + b(X_t(y)).\nabla\varphi(t,X_t(y))$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\left[\partial_t\left(\varphi(t,X_t(y))\right) + \underbrace{(\operatorname{div} b)(X_t(y))}_{\frac{J_t'(y)}{J_t(y)}}\varphi(t,X_t(y))\right] J_t(y)\,dy\,dt$$

TD3

$$= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\left[\partial_t\left(\varphi(t,X_t(y))\right)J_t(y) + \varphi(t,X_t(y))J_t'(y)\right]dy\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\,\partial_t\left(\varphi(t,X_t(y))\,J_t(y)\right)dy\,dt$$

Si on intègre en $t \in \mathbb{R}^+$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \Big(\varphi(0, \underbrace{X_0(y)}_{y}) \underbrace{J_0(y)}_{1} \Big) dy$$ TD3

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \varphi(0,y)\, dy$$

Donc $\underbrace{u}_{u_0(X_{-t}(x))}$ est sol faible de (⁂).

2) Unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles de (⁂) et $u = u_1 - u_2$.

Alors (linéarité) u est sol faible de (⁂) avec donnée initiale nulle, i.e.

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d} u(t,x) \left[\partial_t \varphi + b.\nabla \varphi + \mathrm{div}(b) \varphi \right](t,x)\, dx\, dt = 0$$
$$\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d).$$

Comme ds le cas b constant, ceci revient à

mq $\begin{cases} \forall \psi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d), \ \exists \varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d) \text{ tq} \\ \partial_t \varphi + b.\nabla \varphi + \mathrm{div}(b) \varphi = \psi, \ (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \end{cases}$

En effet, on aura alors

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} u(t,x)\, \psi(t,x)\, dx\, dt = 0$$
$$\forall \psi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$$

D'où (Lemme super-important) $\Rightarrow u = 0$ p.p.

De même que dans le cas $b = \text{cst}$, on résout

avec la donnée (finale) $\varphi(T, \cdot) = 0$

où le T est fixé tq $\operatorname{supp} \psi \subset [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

Cela nécessite de savoir résoudre l'équation de transport (pour les sols classiques) avec

- $\to$ second mb (ψ ici)
- $\to$ terme multiplicatif qui est C^0 ($\underbrace{\operatorname{div} b}_{\in C_b^0(\mathbb{R}^d)}$ ici)

ce que l'on peut faire, comme dans le cas $b = \text{cst}$ (Exo). ■

Rem : * Ce thm s'étend à $b \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d ; \mathbb{R}^d)$ (chps de vect. bornés Lipschitziens) mais il faut utiliser la formule de chgmt de variables dans les intégrales pour les homéomorphismes bi-Lipschitz (moins que C^1)

* La régularité $W^{1,\infty}$ est essentiellement optimale pour utiliser Cauchy-Lip. (dans le flot X_t)