Ch II Lois de Conservation Scalaires

On s'intéresse ici à une equ de transport

<u>unidimensionnelle</u> : $u : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

↳ $\mathbb{R}^d$ avec $d = 1$ $\qquad (t, x) \longrightarrow u(t,x)$

<u>non_linéaire</u> :

$$(*) \begin{cases} \partial_t u + \partial_x \big(f(u)\big) = 0 , & \text{sur }]0,T[\times \mathbb{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 , & \text{sur } \mathbb{R} . \end{cases}$$

où l'état est $u : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et

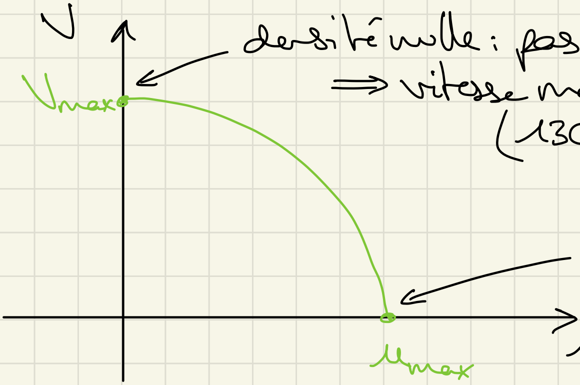
$f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ est appelée "fonction de flux".

Cette equ modélise par ex une densité de vehicules $u(t,x)$ au tps t, au pt x sur une route unidimensionnelle infinie,

et alors $f(u) = u\, V(u)$

densité de véhicules

vitesse des véhicules qui est fct de la densité u



(Modélisation $\longrightarrow$ du 0).

23/03/2021

(Infos : . DM : TD2 avant ce soir 23h59.
. Cours 30/03, 6/04 et 13/04
. Exam : 4/05 16h $\to$ 18h salle 0A1)

Comme f est supposé C^1 (ni C^2), (*)

se réécrit
$$\begin{cases} \partial_t u + f'(u)\partial_x u = 0 \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

C'est une équ de transport, à vitesse (i.e. de "chp de vecteur") $b(t,x) = f'(u(t,x))$

Ds le chap I, le chp de vecteur $b = b(x)$ était fixé. Ici ce dernier dépend
(et ne était indép de t)

de la solution elle même $u(t,x)$.

valeur de la sol au tps t au pt x

Rem : Il ne dpd par contre pas directement de t, de x (ni des dérivées de u)

↳ L'équ est non-linéaire : si u_1 et u_2 sont 2 solutions, $\lambda u_1 + u_2$ n'est pas solution de (*) !

(NB : sauf si $f(s) = \alpha s$ auquel cas c'est un cas particulier du ch I)

Le cas modèle, c'est l'équ de Burgers, donnée par $f(s) = \frac{s^2}{2}$, i.e. (*) devient

$$\partial_t u + \underbrace{u \, \partial_x u}_{\partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right)} = 0$$

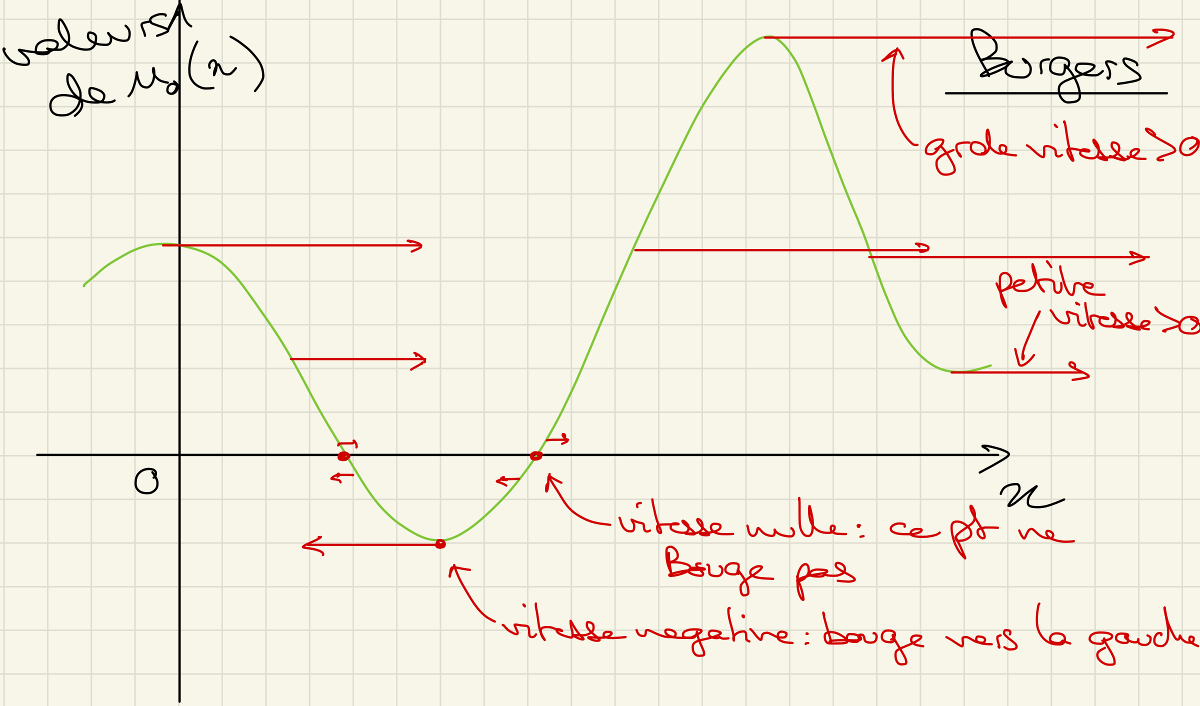
vitesse du transport = valeur de la solut !

↳ Les grdes valeurs de u st transportées vite !

Les petites " " " " lentement

Les valeurs negatives " " vers la gauche

cf Dessin :



I Solutions classiques

Déf : Soit $T > 0$ et $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R})$. On dit que u est solution classique de $(*)$ sur $[0,T]$ si :

i) $u \in C^1(]0,T[\times \mathbb{R}) \cap C_b^0([0,T] \times \mathbb{R})$

ii) u vérifie l'equ $(*)$ en tout pt

Le thm suivant etablit l'existence (et

(l'unicité) locale en tps des solͤ classiques ainsi qu'une description du tps T^* auquel la solͤ cesse d'exister.

On note $c(u) = f'(u)$

i.e. $c = f'$: "la vitesse" (célérité)

Thm : Soit $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R})$

On définit $T^* = T^*(u_0)$ par :

* $T^* = +\infty$ si $c \circ u_0$ est croissante ; $f'(u_0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
* $T^* = \dfrac{-1}{\operatorname{Inf}((c\circ u_0)')}$ sinon.

Alors, $\forall T < T^*$, $\exists !$ solution classique de $(*)$ sur $[0,T]$.

Rem : * si $c \circ u_0$ est croissante, la solution est "globale en tps" (≥ 0), i.e. bien définie $\forall t \geq 0$.

* Si $c \circ u_0$ n'est pas croissante, alors $\exists$ des pts x tq $(c\circ u_0)'(x) < 0$, et donc

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} (c\circ u_0)'(x) < 0$$

De plus $(c\circ u_0)' = u_0' \, c'\circ u_0$ avec

$c' = f'' \in C^0(\mathbb{R})$ et $\begin{cases} u_0' \in C_b^0(\mathbb{R}) \\ u_0 \in C_b^0(\mathbb{R}) \end{cases}$, donc

$(c\circ u_0)'$ est une fonction $C_b^0(\mathbb{R})$, donc

$\inf (c\circ u_0)' > -\infty$.

D'où finalement, ds ce cas, $0 < T^* < +\infty$

↳ Le thm donne existence et unicité

jusqu'à ce tps T^* !.... Après ...?...

• On va voir (TD4) que en

$t = T^*$, la solution explose ! ⇝

$$\|\partial_x u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \xrightarrow[\substack{t\to T^* \\ t<T^*}]{} +\infty$$

↳ on ne va pas pouvoir prolonger cette solution classique au delà de T^* !

La démo ressemble au cas linéaire :

utilise la méthode des caractéristiques.

↳ Cependant, ces courbes caractéristique dépendent ici de la solution.

Dem : <u>• Unicité (et formule utile pour l'existence)</u> : Si u est sol° classique, on définit le flot (cô ds le cas linéaire) sauf que ça dépd de u

$\phi(t,x)$ par $\begin{cases} \partial_t \phi(t,x) = c(u(t,\phi(t,x))) \\ \phi(0,x) = x \end{cases}$

(bien défini car $u \in C^1 \cap C^0_b$ et $c \in C^1$)

On pose $g(t,x) = u(t,\phi(t,x))$.

On a : $\partial_t g(t,x) = (\partial_t u)(t,\phi(t,x)) + (\partial_x u)(t,\phi(t,x)) \times \underbrace{\partial_t \phi(t,x)}_{c(u(t,\phi(t,x)))}$

$= (\partial_t u + \underbrace{\underbrace{c(u)\partial_x u}_{f'(u)\partial_x u}}_{\partial_x(f(u))})(t,\phi(t,x))$

$= 0$ car u est sol de (*).

Donc necessairement $g(t,x) = g(0,x)$ $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$

$= u(0,\phi(0,x))$

$= u(0,x) \underset{u \text{ sol de } (*)}{=} u_0(x)$

$\Longrightarrow g(t,x) = u_0(x)$ $\forall t,x$

Or on a $g(t,x) = u(t, \phi(t,x))$ $= u_0(x)\ \forall t,x$ et

ϕ est défini $\partial_t \phi(t,x) = c(\underbrace{u(t,\phi(t,x))}_{= g(t,x) = u_0(x)})$

$\forall t,x$!!!

Donc $\partial_t \phi(t,x) = \underbrace{c(u_0(x))}_{\text{indép de } t\ !!!}$ $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$

$$\phi(t,x) = \underbrace{\phi(0,x)}_{x} + t\, c \circ u_0(x) .$$

$$\boxed{\phi(t,x) = x + t\, c \circ u_0(x) \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}}$$

C'est à dire : les caractéristiques sont des droites ! (Mais qui dpd de la donnée u_0 ⚠)

A ce stade, on a Mq si u est solut° classique de $(*)$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}$, alors, nécessairement

$$\boxed{u(t, \underbrace{x + t\, c \circ u_0(x)}_{\phi(t,x)}) = u_0(x) \, , \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}}$$

Notation : $\phi_t(x) := \phi(t,x)$.

On va maintenant Mq $\forall\ t \leq T < T^*$, on peut inverser $\phi_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x + t\, c \circ u_0(x)$

c'est à dire écrire $u(t,y) = u_0(\phi_t^{-1}(y))$

avec ϕ_t^{-1} défini par $\phi_t^{-1} \circ \phi_t = Id_{\mathbb{R}}$.

Si on a montré ϕ_t bijective, cela implique l'unicité.

✩ Inversion de ϕ_t et existence.

Mq $\forall t \leq T < T^*$, $\phi_t : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x + t c \circ u_0(x) \end{array}$ est un C^1 difféomorphisme.

On a :

- ϕ_t est C^1 car u_0 et c le sont

surjectivité

- $\phi_t(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ car u_0 bornée $\Downarrow$ $t c \circ u_0$ borné
- $\phi_t(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

Injectivité & différentielle

- $\phi_t'(x) = 1 + t \underbrace{u_0'(x) c' \circ u_0(x)}_{(c \circ u_0)'(x)}$

⚠ Pt important

✩ Soit $(c \circ u_0)' \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, alors on a

$$\phi_t' \geq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

✩ Sinon, $\phi_t'(x) > 0 \iff 1 + t (c \circ u_0)'(x) > 0$

$$\iff t < -\frac{1}{(C\circ u_0)'(x)}$$

Donc $\phi_t' > 0$ sur tout $\mathbb{R}$,

<u>ssi</u> $t < -\dfrac{1}{\inf\limits_{\mathbb{R}}((C\circ u_0)')}$

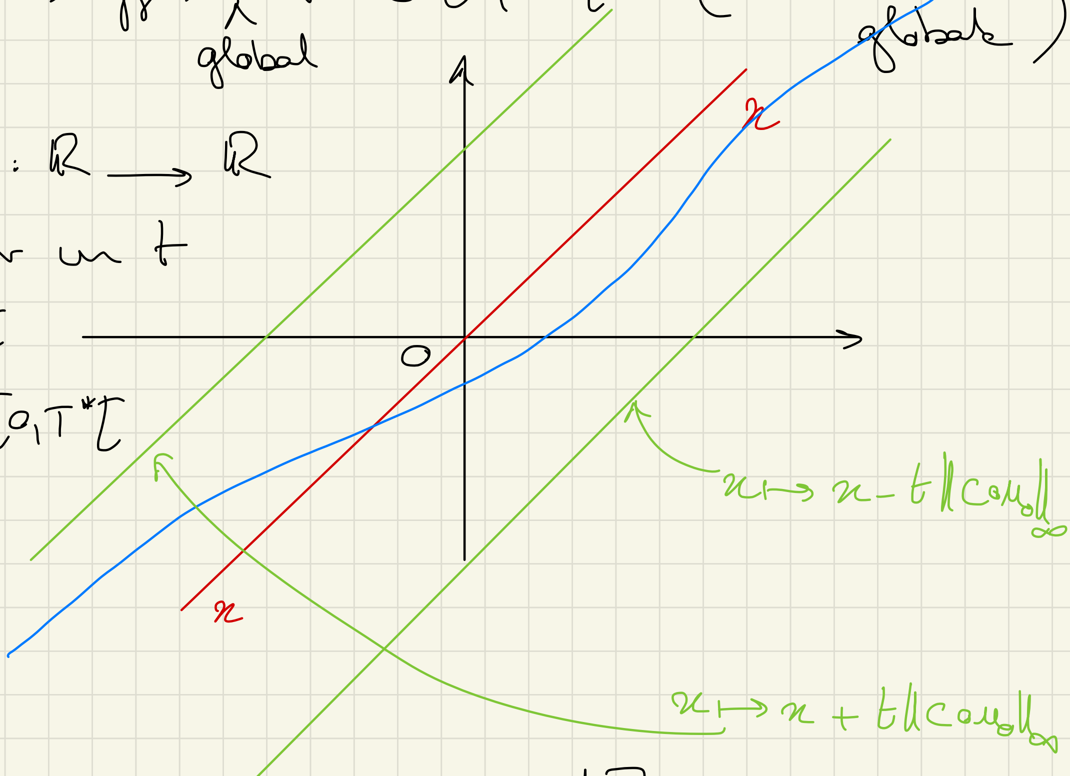
$$\iff t < T^*$$

Dans les 2 cas, on a $\phi_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est un difféo global, $\forall t \in [0, T^*[$ (thm d'inversion globale)

$\phi_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

pour un t fixé

$t \in [0, T^*[$



[ceci conclut l'unicité !].

NB : on peut définir l'applicat° :

$$\Phi : (t,x) \longmapsto \Phi(t,x) = (t, \phi_t(x)) = (t, x + t\, c\circ u_0(x))$$

$$[0,T^*[\times \mathbb{R} \longrightarrow [0,T^*[\times \mathbb{R}$$

est aussi une app. C^1, d'inverse

$$\Phi^{-1} \quad (t,y) \longrightarrow (t, \phi_t^{-1}(y))$$

où $\phi_t^{-1}(y)$ est l'inverse de ϕ_t (à t fixé)

et Φ^{-1} est aussi C^1 par thm fcts implicites.

La formule (♡) suggère la solu° sous la forme $u(t,y) = u_0(\phi_t^{-1}(y))$

pour $(t,y) \in [0,T^*[\times \mathbb{R}$.

Pour le vérifier, il faut calculer ∂_t et ∂_y de ceci/cela et donc ∂_t et ∂_y de $\phi_t^{-1}(y)$.

$$y = \phi_t(\phi_t^{-1}(y)) = \phi(t, \phi_t^{-1}(y))$$

. dérivée %t : $\quad 0 \overset{(1)}{=} \partial_t \phi(t, \phi_t^{-1}(y)) + \partial_t \phi_t^{-1}(y) \, \partial_x \phi(t, \phi_t^{-1}(y))$

. dérivée % y : $\quad 1 \overset{(2)}{=} \partial_y \phi_t^{-1}(y) \, \partial_x \phi(t, \phi_t^{-1}(y))$.

Or $\phi(t,x) = x + t\, c\circ u_0(x)$

$$\longrightarrow \begin{cases} \partial_t \phi(t,x) = c\circ u_0(x) \\ \partial_x \phi(t,x) = 1 + t\,(c\circ u_0)'(x) \underset{\uparrow\ t\in[0,T^*[}{>} 0 \end{cases}$$

D'où
$$\partial_t \phi_t^{-1}(y) \overset{(1)}{=} -\left(\frac{\partial_t \phi}{\partial_x \phi}\right)(t, \phi_t^{-1}(y)) = -\frac{c\circ u_0(\phi_t^{-1}(y))}{1 + t\,(c\circ u_0)'(\phi_t^{-1}(y))}$$
$$\partial_y \phi_t^{-1}(y) \overset{(2)}{=} \frac{1}{\partial_x \phi(t, \phi_t^{-1}(y))} = \frac{1}{1 + t\,(c\circ u_0)'(\phi_t^{-1}(y))}$$

En particulier, on remarque :
$$\partial_t \phi_t^{-1}(y) + c\circ u_0(\phi_t^{-1}(y))\, \partial_y \phi_t^{-1}(y) = 0$$

Finalement, pour $\boxed{u(t,y) = u_0(\phi_t^{-1}(y))}$:
$$\partial_t u(t,y) = \partial_t \phi_t^{-1}(y)\, u_0'(\phi_t^{-1}(y))$$
$$\partial_y u(t,y) = \partial_y \phi_t^{-1}(y)\, u_0'(\phi_t^{-1}(y))$$
et donc
$$\Big(\partial_t u + \underbrace{c(u)}_{f'(u)} \partial_y u\Big)(t,y) = u_0'(\phi_t^{-1}(y)) \underbrace{\Big(\partial_t \phi_t^{-1}(y) + c(u_0(\phi_t^{-1}(y)))\cdot \partial_y \phi_t^{-1}(y)\Big)}_{0}$$

et u est sol de (*) sur $[0,T^*[\times\mathbb{R}$ ■

NB: Examen sans notes de cours.

Exam: Mer 5/05 matin ?

NON : on reste 16H → 18H.

Exam 11/05 - 16H.

Episodes prec. • ChI Eq transport linéaires

• ch II : Lois cons. scalaires

$$\partial_t u + \partial_x \big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fct flux}}}{f(u)} \big) = 0$$

$$\partial_t u + \underbrace{f'(u)}_{\text{vitesse dpd de } u} \partial_x u = 0$$

★ $u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \cap C^0_b(\mathbb{R})$

$\Longrightarrow \exists\, T_* > 0$ et $\exists !$ sol classiq

sur $[0, T_*[$.

★ (TD n°4 ?) : $\|\partial_x u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \longrightarrow +\infty$

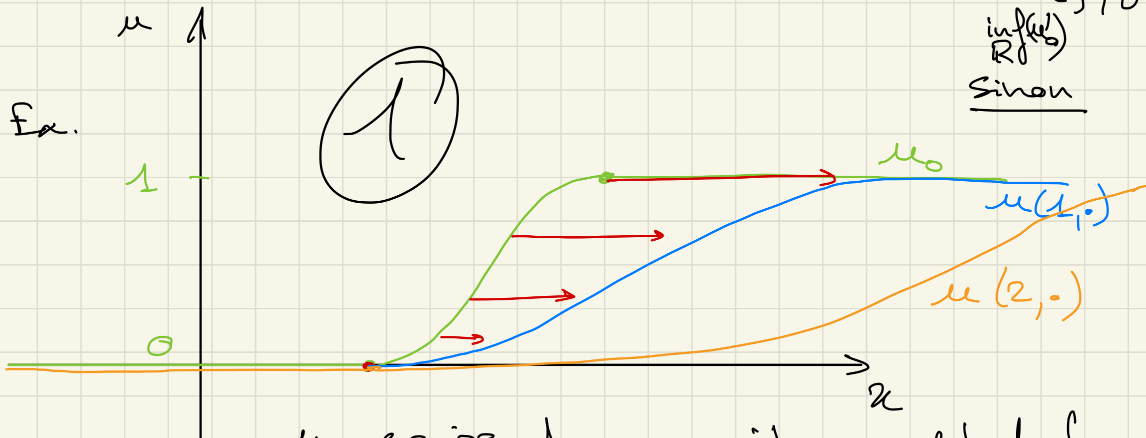
lorsque $t \underset{t<T_*}{\longrightarrow} T_*$.

↳ La sol classiq ne se prolonge pas au delà de T_*.

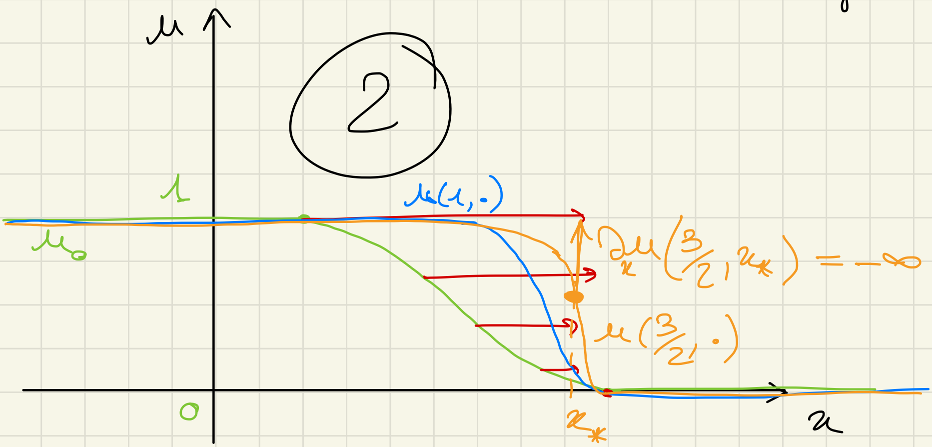
Ex Burgers : $f(u) = \frac{u^2}{2}$, i.e. $f'(u) = u$

↳ le thm donne $T_* = T^* = \begin{cases} +\infty \text{ si } u_0 \nearrow \\ -\dfrac{1}{\inf_{\mathbb{R}}(u_0')} \in]0,\infty[\quad \text{sinon} \end{cases}$

Ex.



u_0 croissante $\Rightarrow$ existence globale !
sol° définie et C^1 sur $[0,\infty[\times\mathbb{R}$.



u_0 non croissante $\Longrightarrow$ la sol cesse d'exister (ds C^1) au tps T^* (ici $T^* = 3/2$).

La preuve donne aussi la formule

$$u\left(t, x + t\,c(u_0(x))\right) = u_0(x), \quad (t,x) \in [0,T^*[\times \mathbb{R}$$

$\xrightarrow{} c = f'$ $\longrightarrow$ inverse de la pente des caract.

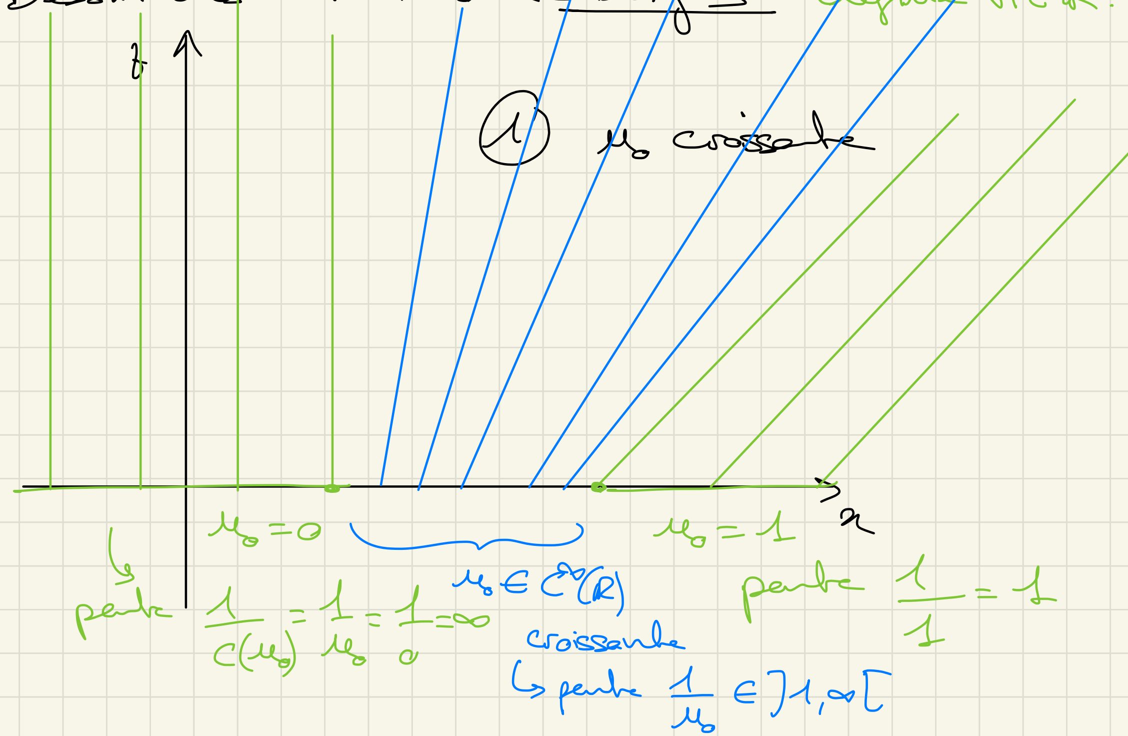
c-à-d la sol u est cte le long des caractéristiques (qui dpdnt de la donnée u_0) :

$$\mathcal{C}_x = \left\{ \left(\underbrace{x + t\,c(u_0(x))}_{X}, t \right), \ t \in [0, T^*[\right\}$$

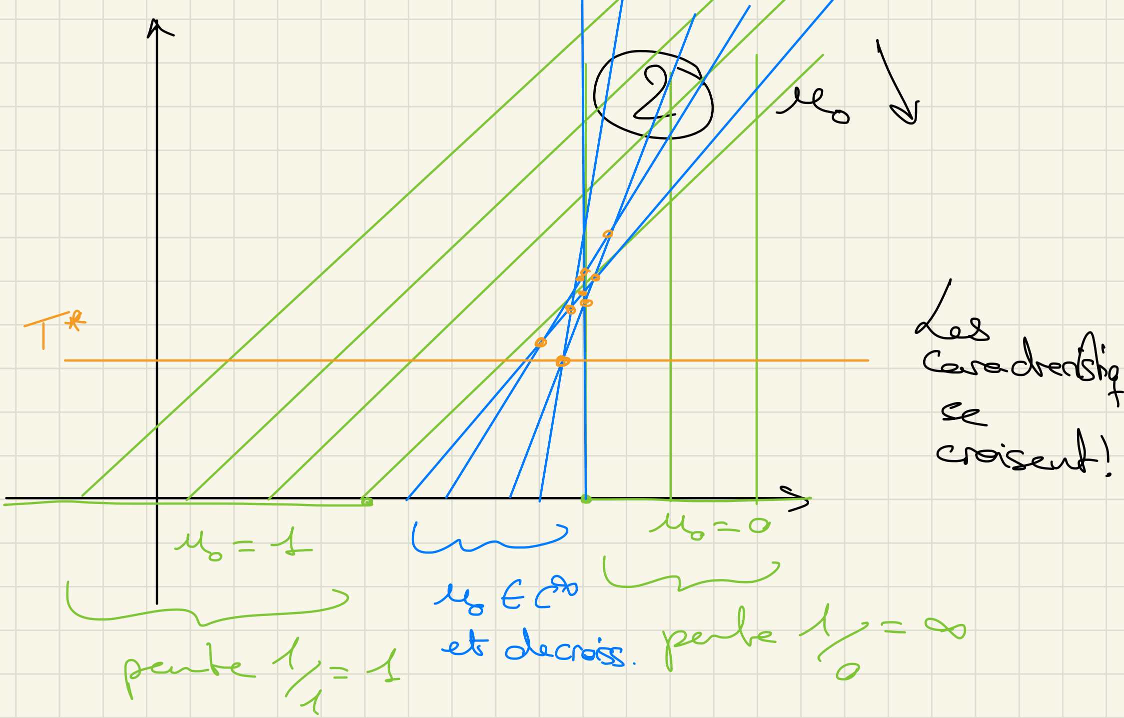
$\hookrightarrow$ Caractéristiq issue du pt x.

$x + tc = X$ $\qquad t(X) = \dfrac{1}{c(u_0(x))}(X - x)$ $\longrightarrow$ en fait, la formule est définie $\forall t \in \mathbb{R}$.

Dessin des caract. avec Burgers



$\hookrightarrow$ Les caract. ne se croisent pas.



Au delà, $x \longmapsto x + t\,c(u_0(x))$

n'est plus injective !!!

⚠ Morale : Mê si $u_0 \in C_b^1$, $\exists!$ sol sur $[0, T^*(u_0)[$ (petit intervalle de tps) Mais explosion au tps T^* : La sol développe une singularité (ds C^1) : " $\partial_x u(T^*, x_*) = -\infty$ " : pente verticale !

↳ La sol u n'est plus C^1 ! Mais on peut peut-ê prolonger cette solution ds un

espace de moindre régularité (L^∞, L^1_{loc} ...)
↳ Nécessité de parler de solut° faible !

II) Solutions faibles

Déf : Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$.

On dit que ▲ u est sol faible de (∗) si

(i) $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et

(ii) $$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left(u \, \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \right) dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0,x)\,dx = 0$$

$\forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

▲ u est sol faible de (∗) sur $[0,T]$ si $u \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R})$ et (ii) vrai $\forall \varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \varphi \subset]-\infty, T] \times \mathbb{R}$.

Rem : A nouveau, il faut vérifier que cette déf. est cohérente avec celle de sol forte / classique :

Prop : ☆ Si u est sol classiq de $(*)$ sur $[0,T]$, alors u est sol faible de $(*)$ sur $[0,T]$.

☆ Si u est solution faible de $(*)$ sur $[0,T]$ et $u \in C^1(]0,T[\times\mathbb{R}) \cap C^0([0,T]\times\mathbb{R})$, alors u est sol classiq de $(*)$ sur $[0,T]$.

Dem : exo.

Rem : Si u sol faible sur $[0,T]$ et $u_0 \in C_b^1$ C_b^∞ alors $\cancel{\Rightarrow}$ u est sol classique sur $[0,T]$.

La régularité ne se propage pas globalement

↳ il est nécessaire d'introduire la notion de sol faible m̂ pour des données régulières (≠ du cas linéaire !).

On va maintenant s'intéresser à certaines familles particulières de soluts faibles :

- Les ondes de choc.
- Les ondes de détente.

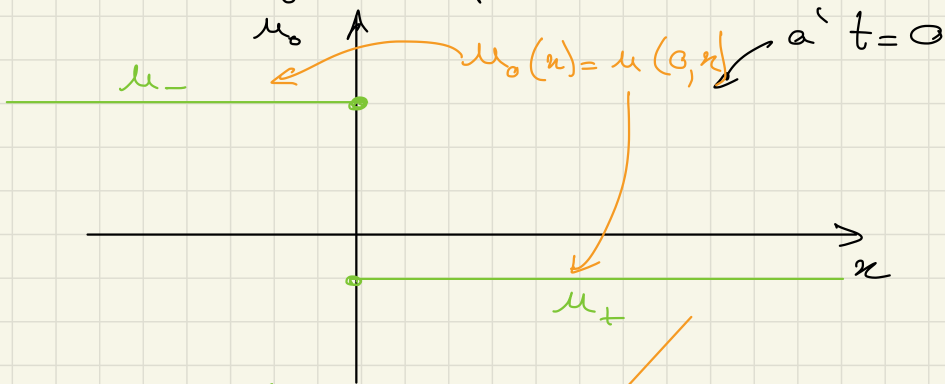
1) Ondes de Choc (ou chocs)

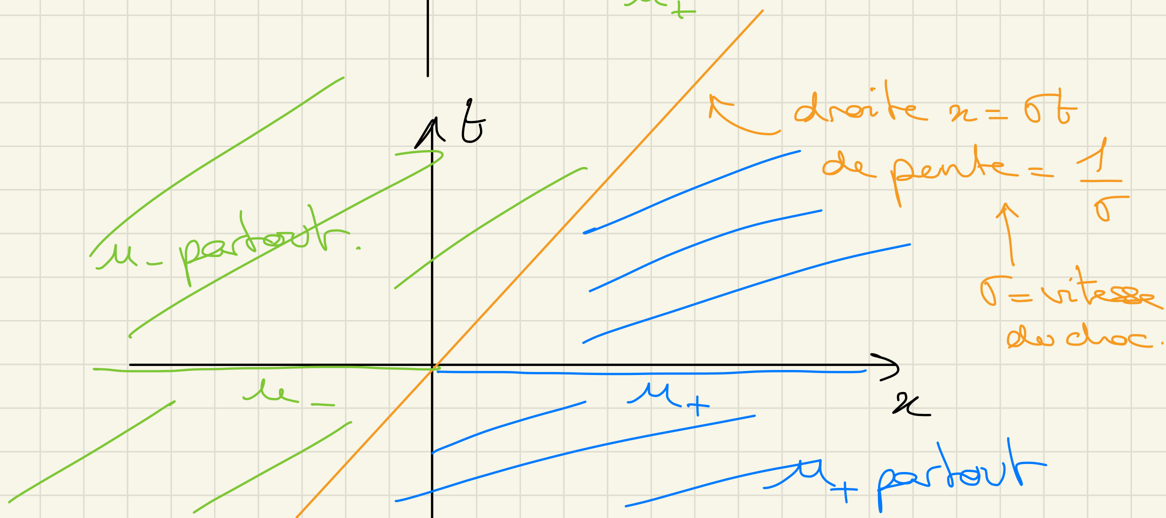
On veut savoir si (*) admet des soluθs faibles constantes par morceaux :

$$u(t,x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x < \sigma t \\ u^+ & \text{si } x > \sigma t \end{cases}.$$

(où $u^+, u^-, \sigma \in \mathbb{R}$ caractérisent la soluθ)

ce qu'on appelle un choc (terminologie issue des gaz compressibles).





Prop : Étant données $u^+, u^-, \sigma \in \mathbb{R}$, la fct

$$u(t,x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x<\sigma t \\ u^+ & \text{si } x>\sigma t \end{cases}$$

est solu° faible de (*) si et seulement si

$$\boxed{f(u^+)-f(u^-) = \sigma(u^+-u^-)}$$

↳ condition de Rankine-Hugoniot.

Autrement formulé : f (fonction flux, donnée par l'équ, le modèle) et la donnée initiale $u_0(x) = \begin{cases} u_+ & x>0 \\ u_- & x<0 \end{cases}$ étant fixées : Il existe un uniq choc qui est sol faible de l'équ, et sa vitesse est donnée par : $\sigma = \dfrac{f(u^+)-f(u^-)}{u^+-u^-}$.

Dem : On calcule pour u donnée par

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left(u\,\partial_t\varphi + f(u)\,\partial_x\varphi\right) dx\,dt = I_1 + I_2$$

avec $I_1 = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u\,\partial_t\varphi\,dx\,dt$, $I_2 = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} f(u)\partial_x\varphi\,dx\,dt$

puis on étudie I_1 et I_2 séparément :

* $I_2 = \int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_{\mathbb{R}} f(u)\partial_x\varphi\,dx\right)dt$ et $u = \begin{cases} u^- & \text{si } x<\sigma t \\ u^+ & \text{si } x>\sigma t\end{cases}$ (@@)

$$= \int_{\mathbb{R}_+}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{\sigma t}\partial_x\varphi\,\underbrace{f(u)}_{f(u^-)}\,dx}_{\underbrace{f(u^-)\int_{-\infty}^{\sigma t}\partial_x\varphi\,dx}_{f(u^-)\varphi(t,\sigma t)}} + \underbrace{\int_{\sigma t}^{\infty}\partial_x\varphi\,\underbrace{f(u)}_{f(u^+)}\,dx}_{f(u^+)\underbrace{\int_{\sigma t}^{\infty}\partial_x\varphi(t,x)\,dx}_{-\varphi(t,\sigma t)}}\Bigg]dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}\left(f(u^-) - f(u^+)\right)\varphi(t,\sigma t)\,dt.$$

* Pour I_1 : le calcul diffère selon que $\sigma>0$, $\sigma<0$ ou $\sigma=0$. On va traiter le cas $\sigma>0$. Le cas $\sigma<0$ est similaire et le cas $\sigma=0$ est + simple (exo). On suppose $\sigma>0$ et on rappelle : $u(t,x) = \begin{cases} u^- & \text{si } t>x/\sigma \\ u^+ & \text{si } t<x/\sigma\end{cases}$ (@@)

(où on a utilisé $\sigma>0$)

On écrit $I_1 \overset{\text{Fubini}}{=} \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}_+} u\,\partial_t\varphi\,dt\right)dx$

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}_+}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}_+} u\,\partial_t\varphi\,dt\right)}_{\displaystyle\int_0^{x/\sigma} \underbrace{u}_{u^+\ (R)}\,\partial_t\varphi\,dt+\int_{x/\sigma}^{\infty} \underbrace{u}_{u^-}\,\partial_t\varphi\,dt}dx + \int_{\mathbb{R}_-}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}_+} u\,\partial_t\varphi\,dt\right)}_{\displaystyle\underbrace{u^-\int_0^{\infty}\partial_t\varphi\,dt}_{-u^-\varphi(0,x)}}dx$$

ici $x<0$

$t>0>\frac{x}{\sigma}$

(R)

$$\underbrace{\underbrace{u^+\int_0^{x/\sigma}\partial_t\varphi\,dt}_{\substack{=u^+\varphi(x/\sigma,x)\\-u^+\varphi(0,x)}} \qquad \underbrace{u^-\int_{x/\sigma}^{\infty}\partial_t\varphi\,dt}_{=-u^-\varphi(x/\sigma,x)}}_{(u^+-u^-)\varphi(x/\sigma,x)-u^+\varphi(0,x)}$$

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}_+}\left((u^+-u^-)\varphi\left(\frac{x}{\sigma},x\right)-u^+\varphi(0,x)\right)dx-\int_{\mathbb{R}_-}u^-\varphi(0,x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+}(u^+-u^-)\varphi\left(\frac{x}{\sigma},x\right)dx-\int_{\mathbb{R}}\underbrace{\left(u^+\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}+u^-\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}\right)(x)}_{u(0,x)}\varphi(0,x)\,dx$$

(R) à $t=0$

donnée initiale.

Récapitulons :

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left(u\,\partial_t\varphi + f(u)\,\partial_x\varphi \right) dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,\varphi(0,x)\,dx$$

$$= I_1 + I_2 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u(0,x)\,\varphi(0,x)\,dx}_{\text{s'annule avec lui}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} (u^+ - u^-)\,\varphi\left(\frac{x}{\sigma}, x\right) dx + \int_{\mathbb{R}_+} \left(f(u^-) - f(u^+)\right) \varphi(t, \sigma t)\,dt$$

$x = \sigma t$

$dx = \sigma dt$

$$- \int_{\mathbb{R}_+} \left(f(u^+) - f(u^-)\right) \varphi\left(x/\sigma, x\right) \frac{dx}{\sigma}$$

$$= \left[(u^+ - u^-) - \frac{f(u^+) - f(u^-)}{\sigma} \right] \int_{\mathbb{R}_+} \varphi\left(x/\sigma, x\right) dx$$

et u est sol faible $\iff$ ceci est $= 0 \ \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$

$$\iff u^+ - u^- = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{\sigma}$$

après avoir choisi un φ tq $\varphi \not\equiv 0$ sur $t = x/\sigma$, $x > 0$

i.e. Condit° de Rankine Hugoniot

$\blacksquare$

13/04/2021

TD2 : $\varphi(t) = \int_0^{t} f(s,t)\,ds$

$$\varphi'(t) = f(t,t) + \int_0^t \partial_2 f(s,t)\,ds.$$

$$\begin{cases} \partial_t u + b\cdot\nabla u = f \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Exam 11/05 16h–18h !

Forme faible ? multiplie par $\varphi \in C_c^{1 \text{ ou } \infty}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ et IPP → dérivées sur φ. (b cst)

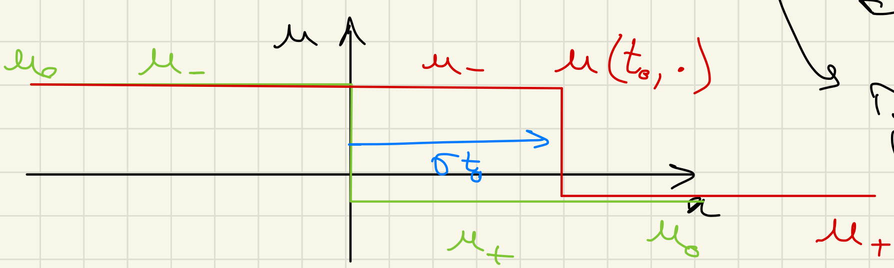
$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u(t,x)\left(-\partial_t - b\cdot\nabla\right)\varphi\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} f\varphi\,dx\,dt$$

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$$

→ Bien posé C_b^1 en tps petit

→ Explosion en tps fini T_*

→ Défini sol faibles ↳ chocs.



σ = vitesse du choc

$\hookrightarrow$ sol faible $\Longleftrightarrow$ $\sigma = \dfrac{f(u^+)-f(u^-)}{u^+-u^-}$

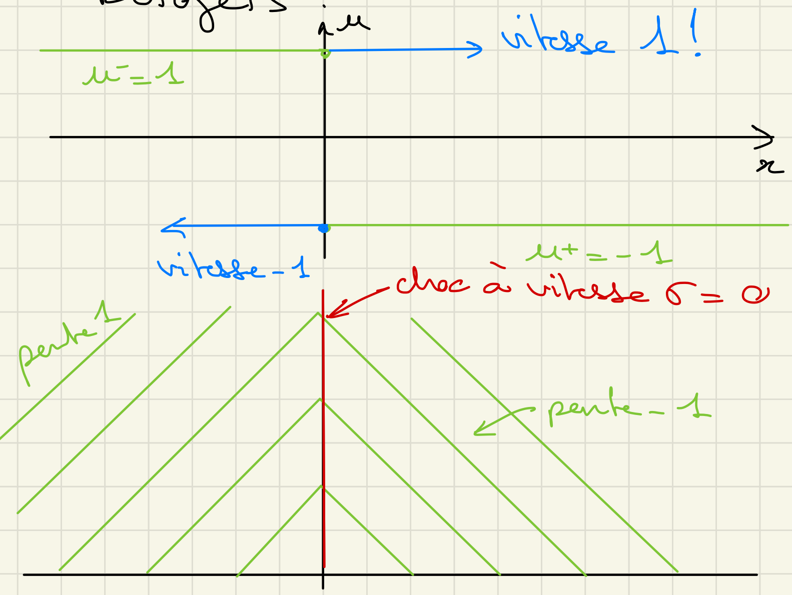
Ex : pour Burgers : $f(u) = \dfrac{u^2}{2}$

Donc $\sigma = \dfrac{(u^+)^2/2 - (u^-)^2/2}{u^+-u^-} = \underbrace{\dfrac{1}{2}(u^+ + u^-)}_{}$

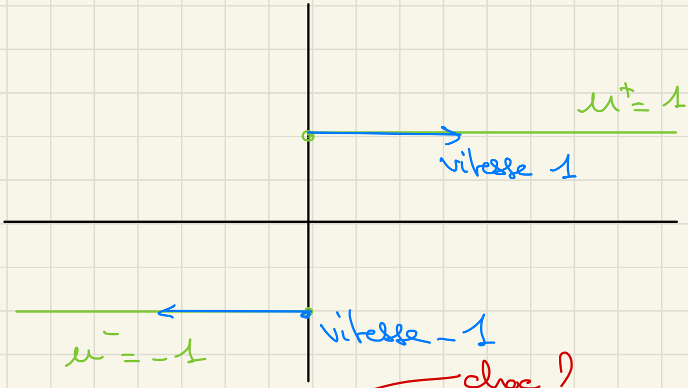
c'est la moyenne des valeurs de u (i.e. des vitesses $f'(u)$) à gche et à drte du choc.

Par exemple, les 2 fcts suivantes sont des chocs stationnaires (vitesse $\sigma = 0$) pour Burgers : $f'(u) = u$: vitesse = valeur de u

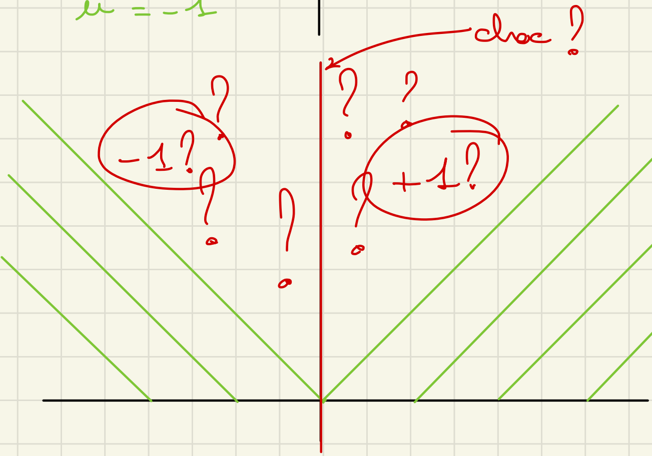
$\sigma = \frac{1-1}{2} = 0$



La prop precedente dit : la fct $u(t,\cdot) = u_0$ $\forall t \geq 0$ est sol faible de $(*)$



La prop. précédente dit la m̂ chose ! $u(t,\cdot) = u_0 \ \forall t \geq 0$ est sol faible de $(\ast)$ (stationnaire).



du pt de vue des caractéristiques "classiques" (i.e. là où la fct est C^1, i.e. loin du choc) ces 2 sols st très différentes !

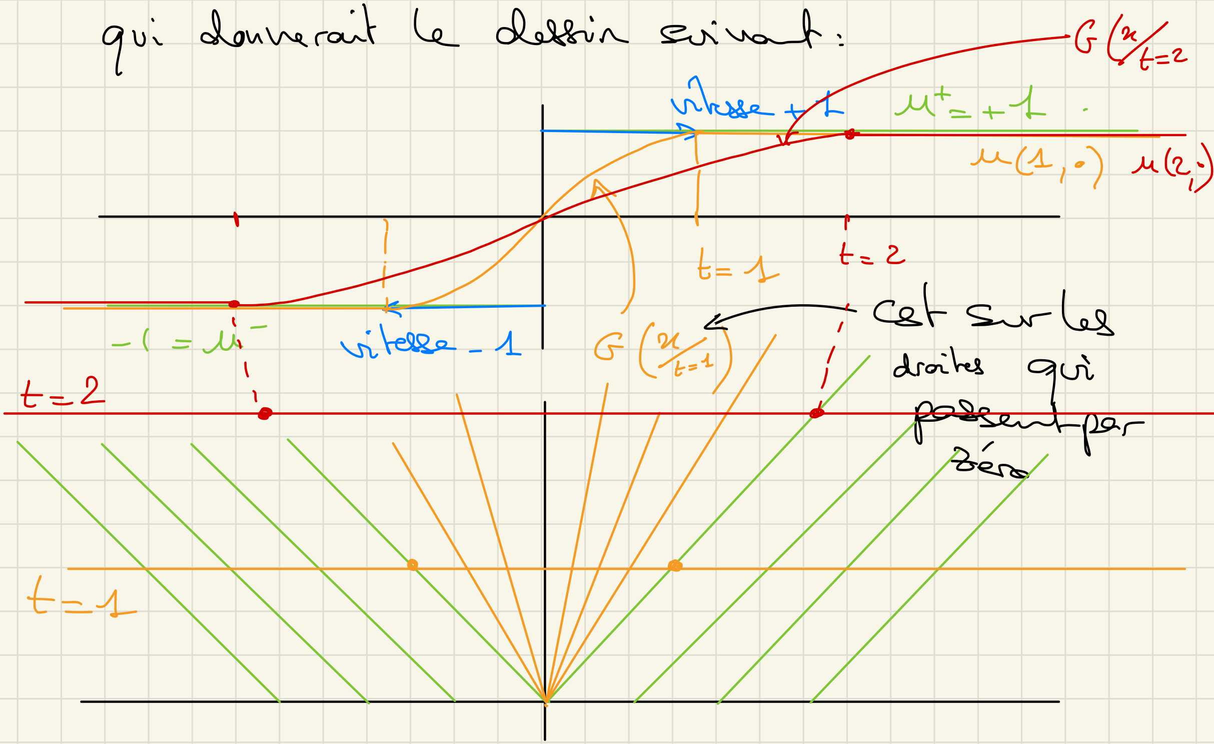
↳ Le 2^e cas n'a pas l'air physique ! i.e. $u(t,x) = \begin{cases} +1 & x>0, \forall t \geq 0 \\ -1 & x<0, \forall t \geq 0 \end{cases}$

2) Ondes de détente (ou détentes)

But : ds la situation ci dessus (la dernière) on aimerait trouver une solution + naturelle, + physique dans la zone avec des ???, dans laquelle la sol n'est pas prescrite par les caractéristiques.

Une sol "naturelle" pourrait ê de la forme $u(t,x) = G\left(\frac{x}{t}\right)$, où G est un "profile" croissant allant de -1 à $+1$.

qui donnerait le dessin suivant :



Lemme : Si $G \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, alors $u(t,x) = G\left(\frac{x}{t}\right)$ est solution de $\partial_t u + f'(u)\partial_x u = 0$ sur $]0,+\infty[\times]a,b[$ avec $0<a<b$

ssi $\forall \xi \in \mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} f'(G(\xi)) = \xi \\ \text{ou } G'(\xi) = 0 \end{cases}$.

Dem :
$$\partial_t u(t,x) = \partial_t\left(G(x/t)\right) = -\frac{x}{t^2} G'(x/t)$$
$$\partial_x u(t,x) = \partial_x\left(G(x/t)\right) = \frac{1}{t} G'(x/t)$$

Donc $u(t,x) = G(x/t)$ sol de $\partial_t u + f'(u)\partial_x u = 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{t^2} G'(x/t) + f'\left(G(x/t)\right)\frac{1}{t}G'(x/t) = 0$$

$$\Leftrightarrow G'(x/t)\left(f'(G(x/t)) - \frac{x}{t}\right) = 0 \quad \forall t \in]0,\infty[\ \forall x \in]a,b[$$

$$\Leftrightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}_+^* \ G'(\xi)\left(f'(G(\xi)) - \xi\right) = 0.$$

■

$u^- < u^+ \Rightarrow f'(u^-) < f'(u^+)$ on $f' \nearrow$

Burgers-Like

Propositⁿ : On suppose $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $f'' > 0$ sur $\mathbb{R}$. On pose $G(\xi) = (f')^{-1}(\xi)$ (bien déf car $f'' > 0 \Rightarrow f' \nearrow$ strict).

Si $u^- < u^+$ "détente", alors la fonction u définie par

$$u(t,x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x \leqslant t f'(u^-) \\ G\left(\frac{x}{t}\right) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } t f'(u^-) < x < t f'(u^+) \\ u^+ & \text{si } x \geqslant t f'(u^+) \end{cases}$$

est une solution faible de $(*)$, appelée onde de détente ou onde de raréfaction.

- $f'' > 0 \Rightarrow$ on est vraiment dans la situat° du dessin ci-dessus avec $u^- < u^+$.
  ↳ On remplit la zone ??? avec une sol autosimilaire
- $f'' > 0 \Rightarrow (f')^{-1}$ bien déf et C^1 (inversion locale)
  $\Rightarrow$ L'eqn $(*)$ est vérifiée à l'intérieur de chacune des 3 zones définissant u.
- La fct $u(t,\cdot)$ définie ci-dessus est $C^0(\mathbb{R})$ en tout $t > 0$ (en effet $G\left(\frac{t f'(u^-)}{t}\right) = G(f'(u^-)) = (f')^{-1}(f'(u^-)) = u^-$)

faux en $t=0$

mais ⚠ elle n'est pas globalement $C^1(\mathbb{R})$

* En $t \longrightarrow 0^+$, $u(t,\cdot) \longrightarrow u^- \mathbb{1}_{\mathbb{R}^-} + u^+ \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ qui n'est pas $C^0(\mathbb{R})$; En particulier, u n'est pas une sol forte.

Dem : Exercice : decouper les integrales suivant les différentes zones ... : pt important : u est C^0 sur $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

3) Non unicité des solutions faibles

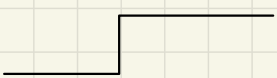
Par ex avec Burgers. $f(u) = u^2/2$,

avec donnée initiale $u_0(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ +1 & , x > 0 . \end{cases}$

* au § 1) on a vu qu'est choc est une sol faible

de vitesse $\sigma = \frac{1}{2}(1-1) = 0$

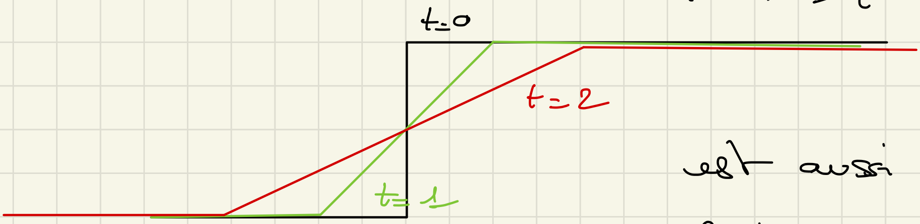
i.e. $u(t,x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, t > 0 \\ +1 & \text{si } x > 0, t > 0 \end{cases}$



(Mais qui a une tronche peu physiq...)

• Au § 2) on a vu qu'une détente était aussi solution, i.e.

$$u(t,x) = \begin{cases} -1 & x < -t \\ x/t & \text{si } -t \leq x \leq t \\ 1 & \text{si } x > t \end{cases}$$



est aussi sol faible avec le même u_0 !!

Morale : Pas unicité des sol faibles !!!

Résumé : • Les sol classiques ne st pas globales } "pas assez de sols classiq"

• Les sol faibles ne st pas uniques

↳ "trop de sol. faibles".

Reste à faire : ① Montrer existence de sol^{ons} faibles

② Trouver un critère de sélection de la "bonne sol faible", la sol physique !

↳ choix !

III Solutions entropiques des lois de Conservation Scalaires

La loi de Cons. Scalaire (*) $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$ est une equation "Conservative" "reversible". Lorsqu'on la dérive de la physique, elle est souvent accompagnée d'une (ou plusieurs) inegalité(s) d'entropie qui exprime(nt) la 2^{nd} loi de la Thermodynamique.

Irreversibilité du système = création d'entropie
($\hookrightarrow$ "flèche du temps").

Def : On dit que (η, q) est un couple entropie/flux d'entropie C^1 pour la LCS (*) si $\eta, q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 et $\boxed{q' = f'\eta'}$

On definit maintenant les soluOs entropiques :

Def : Soit $f \in C^1, T>0$, On dit que u est solution entropique de (*) sur $[0,T]$ Si $\star$ $u \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R})$ et

★ $\forall (\eta, q)$ couple entropie/flux d'entropie C^1 tq $\underline{\eta \text{ convexe}}$, on a

$$\partial_t(\eta(u)) + \partial_x(q(u)) \leq 0$$ au sens faible i.e.

$$\iint_{\mathbb{R}_+ \mathbb{R}} \eta(u)\partial_t \varphi + q(u)\partial_x \varphi \, dx dt - \int_{\mathbb{R}} \eta(u(0,x))\varphi(0,x)dx \geq 0$$

$$\forall \varphi \in C_c^1(]-\infty, T] \times \mathbb{R}), \ \underline{\varphi \geq 0}$$

Plusieurs choses à vérifier :

1) Une sol entropiq est sol faible

2) Une sol classique est sol entropique

<u>Lemme</u> : Toute sol entropique sur $[0,T]$ est sol faible sur $[0,T]$.

<u>Dem</u> : Pour $\eta(s) = s$ (C^1, convexe), on a $q' = f' \times 1$ soit $q(s) = f(s) + \text{cste}$.

et on déduit de " sol entropique " :

$$\iint u \partial_t \varphi + (f(u) + \underbrace{c) \partial_x \varphi}_{= 0 \text{ après IPP}} \, dx dt - \int u(0,x)\varphi(0,x)dx \geq 0 \quad \forall \varphi \geq 0$$

De m̂ avec $\eta(s) = -s$, $q' = -f' + c$ et

$$\iint -u\partial_t \varphi - f(u)\partial_x \varphi \, dx dt + \int u(0,x)\varphi(0,x)dx \geq 0 \ \forall \varphi \geq$$

et en combinant les 2,

$$\iint \left(u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi \right) dx\,dt - \int u(0,x) \varphi(0,x)\, dx = 0$$

$$\forall \varphi \in C_c^1(]-\infty, T] \times \mathbb{R}), \quad \varphi \geq 0.$$

C'est donc vrai aussi $\forall \varphi \leq 0$, puis par linéarité, $\forall \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 \leq 0$.

Et ceci dense dans C_c^1, ce qui conclut ∎

Lemme : Si u est sol classique de $(*)$ sur $[0,T)$, alors u est sol entropique de $(*)$ sur $[0,T)$ et la dissipat° d'entropie est nulle ($\forall$ couple (η, q))

↳ qtité $\partial_t(\eta(u)) + \partial_x(q(u))$, qui est ≤ 0 pour les sol entropiques.

Dem : Soit u sol classique (i.e. C_b^1 + résout l'équ partout) et (η, q) couple entropie/flux d'entropie.

Alors $\partial_t(\eta(u)) + \partial_x(q(u))$

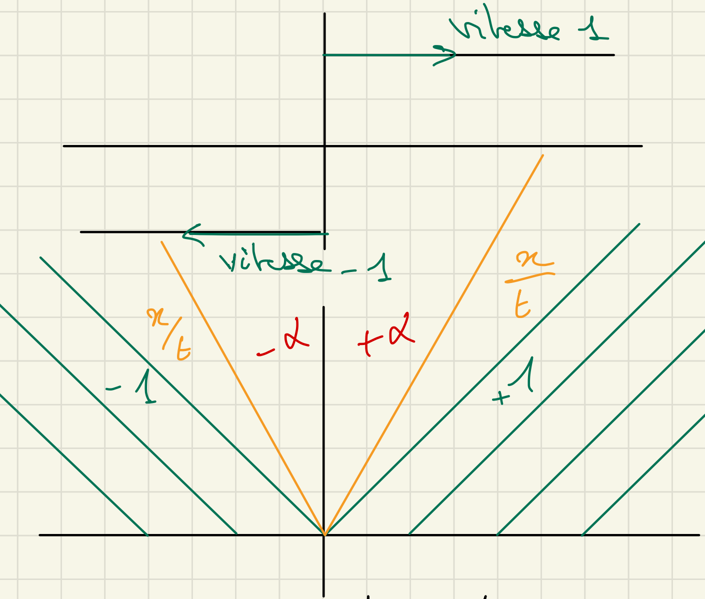
$$= \eta'(u) \partial_t u + q'(u) \partial_x u \qquad q' = \eta' f'$$

$$= \eta'(u) \big(\underbrace{\partial_t u + f'(u) \partial_x u}_{= 0 \text{ car } u \text{ sol !}} \big) = 0$$

Donc si on multiplie par φ et IPP, on obtient le résultat ∎

Ex : Retour sur les ondes de raréfaction :

Pour Burgers, $f(u) = \frac{u^2}{2}$, avec donnée initiale $u_0 = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



$$u^\alpha(t,x) \quad \alpha \in [0,1] \quad \begin{cases} -1 & \text{sur} \quad x \leq -t \\ \frac{x}{t} & \text{sur} \quad -t \leq x \leq -\alpha t \\ -\alpha & \text{sur} \quad -\alpha t < x \leq 0 \\ +\alpha & \text{sur} \quad 0 < x \leq \alpha t \\ +x/t & \text{sur} \quad \alpha t < x \leq t \\ +1 & \text{sur} \quad t < x \end{cases}$$

Lemme : $\forall \alpha \in [0,1]$, u^α est sol faible associée à $u_0 = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, mais

u^α sol entropique $\iff \alpha = 0$.

Dem = ?

Rem : pour un u_0 général, on n'a à ce stade pas montré ni existence / ni unicité de la sol° entropique !

III Approximation parabolique et viscosité evanescente

Un autre principe de selection de la solution faible "physique" :

Ds la nature, tout matériau | a une réponse visqueuse / conduit la chaleur

Mê si le modèle (*) est conservatif, i.e. on a negligé la viscosité / la conduc° de chaleur, on peut penser que les sol°s physiques sont "un cas limite" de solutions d'eqns avec viscosité / chaleur, lorsque cette dernière tend vers 0.

i.e. une sol de $(*)_\varepsilon \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \partial_x (f(u^\varepsilon)) - \underbrace{\varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon}_{\text{viscosité}} = 0 \\ u^\varepsilon(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$

$\xrightarrow{0}$ (cf + loin pr justif.)

Déf : On dit que u est solution de viscosité évanescente de $(*)$ s'il existe u^ε sol faible de $(*)_\varepsilon$ (i.e. tq

$$\iint \left(u^\varepsilon \partial_t \varphi + f(u^\varepsilon)\partial_x \varphi - \varepsilon u^\varepsilon \partial_x^2 \varphi\right) - \int u_0 \varphi(0,\cdot) = 0 \ \forall \varphi)$$

tq $\|u^\varepsilon\|_{\underbrace{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})}_{\text{ou loc}}} \leq C$ et $u^\varepsilon \longrightarrow u$ L^1_{loc}

$\hookrightarrow$ ie $\|u^\varepsilon - u\|_{L^1(K)} \longrightarrow 0$ $\forall K$ cpct.

Prop : toute solution de viscosité évanescente est solution entropique (avec flux $\eta \in C^2$)

Dem : u^ε régulière ...

$$\partial_t(\eta(u^\varepsilon)) = \eta'(u^\varepsilon)\partial_t u^\varepsilon \overset{\text{sol } (*)_\varepsilon}{=} \eta'(u^\varepsilon)\Big(\underbrace{-\partial_x(f(u^\varepsilon))}_{-f'(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon} + \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon\Big)$$

(et $q' = \eta' f'$)

$$= -q'(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon + \eta'(u^\varepsilon)\varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon$$

$$= -\partial_x(q(u^\varepsilon)) + \varepsilon \underbrace{\partial_x\left(\eta'(u^\varepsilon)\partial_x u^\varepsilon\right)}_{\partial_x^2(\eta(u^\varepsilon))} - \varepsilon \eta''(u^\varepsilon)(\partial_x u^\varepsilon)^2$$

Donc, $\forall \varphi \in C^1_c(]-\infty, T] \times \mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} \left(\eta(u^\varepsilon)\partial_t \varphi + q(u^\varepsilon)\partial_x \varphi\right) dx\,dt - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(0,x)\,dx$$

$$= \iint \left(\varepsilon\, \partial_x^2(\eta(u^\varepsilon))\,\varphi - \varepsilon\, \eta''(u^\varepsilon)(\partial_x u^\varepsilon)^2 \varphi\right) dx\,dt$$

$$= \varepsilon \underbrace{\iint \eta(u^\varepsilon)\,\partial_x^2\varphi}_{\underbrace{\left|\ \cdot\ \right| \leq \underbrace{\|\eta(u^\varepsilon)\|_{L^\infty}}_{\text{Borné car } \|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \text{ borné}} C_\varphi}_{\longrightarrow\, 0 \text{ avec le } \varepsilon \text{ devant}}} - \varepsilon \iint \underbrace{\eta''(u^\varepsilon)}_{\geq 0}\underbrace{(\partial_x u^\varepsilon)^2}_{\geq 0}\underbrace{\varphi}_{\geq 0}$$

car η convexe

Par ailleurs $\eta(u^\varepsilon) \longrightarrow \eta(u)$ ds L^1_{loc}

car $\|\eta(u^\varepsilon) - \eta(u)\|_{L^1(K)} \leq \underbrace{\underbrace{\sup_{u^\varepsilon(K)} |\eta'|}_{\text{Borné par hyp}}}_{\leq C} \underbrace{\|u^\varepsilon - u\|_{L^1(K)}}_{\longrightarrow 0}$

D'où, par ~~passage~~ à la limite,

$$\iint \left(\eta(u)\partial_t\varphi + q(u)\partial_x\varphi\right)dx\,dt - \int u_0\,\varphi(0,\cdot) \leq 0$$
$$\forall \varphi \geq 0$$

et u est sol entropique
(avec flux $\eta \in C^2$, sinon il faut le régulariser...) ∎

NB: A fortiori, la sol de viscosité evanescente est solution faible.

Reste $\nearrow$ Mq l'équ $(*)_\varepsilon$ admet une sol $\forall \varepsilon > 0$
$\searrow$ Cette sol CV lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$

On aura alors existence pour $(*)$.

III Approximation parabolique et viscosité évanescente

Pour montrer existence et unicité des sols faibles, on va approcher notre équ conservative $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$ par une équ "dissipative" (parabolique) :

"laplacien"

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x(f(u^\varepsilon)) \underbrace{- \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon}_{\text{perturbation parabolique/visqueuse}} = 0$$

$\varepsilon > 0$

en montrant :

- Cette équ admet $\forall \varepsilon > 0$, une uniq sol faible
- cette sol converge lorsque $\varepsilon \to 0^+$.
- La limite obtenue est sol faible de la loi de conservat (*).

↳ C'est un pcpe de sélection de la bonne sol faible : c'est celle qui est limite de "solutions visqueuses" (i.e. de sol de l'équ avec $\varepsilon > 0$)

1) Etude des equs paraboliques

↳ La plus simple d'entre elles, l'equ de la chaleur
$$\begin{cases} \partial_t u - \varepsilon \partial_x^2 u = 0 & ,(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u\big|_{t=0} = u_0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Par chgmt de var en tps, on se ramène à $\varepsilon = 1$:
$$(\heartsuit) \begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

(Fourier 1822)

. modélisat°
. Dvp nouvel outil (séries de Fourier)
. Resolu l'équ.

Théorème : $\forall u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\exists !$ solution faible de $(\heartsuit)$, i.e. $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et
$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} u(t,x)\left(-\partial_t \varphi - \partial_x^2 \varphi\right) dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, \varphi(0,x)\, dx = 0$$
$$\forall \varphi \in C_c^{\infty \text{ ou } 2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

De plus, cette solution u est donnée explicitement par $u(t,x) = \left(G_t * u_0\right)(x)$
$$\forall t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

avec $G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t}$

i.e. $u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y)\,dy$

et vérifie $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$.

Rem : • On trouve la formule grâce à la Transformée Fourier.

• Effet regularisant de la chaleur :

$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ mais $\forall t > 0$, $u(t,.) \in C^\infty(\mathbb{R})$

Dem : Il suffit de verifier que la formule donne le resultat. (dériver sous $\int$)

Exo.

Pour l'eqn $\partial_t u + \partial_x(f(u)) - \partial_x^2 u = 0$

on va résoudre $\partial_t u - \partial_x^2 u = F$

(puis on regardera $F = F(u)$ ...)

Thm : Si $F \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$,

l'eqn $\partial_t u - \partial_{x}^2 u = F(t,x)$ admet une uniq sol faible donnée par

$$u(t,x) = (G_t * u_0)(x) + \int_0^t \left(G_{t-s} * F(s,\cdot)\right)(x)\,ds$$

convol° en x !

Dem : exo.

$$-\partial_x(f(u))$$

Finalement, on écrit notre eqn

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = -\partial_x(f(u)) .$$

et argument de pt fixe ...