Université Paris-Sud 2018–2019

Math363

Examen partiel: durée 2h

documents et calculatrices interdits

Problème

1. Soit $v \in \mathbb{R}$. On considère l'équation aux dérivées partielles,

$$\begin{cases} \partial_t u + v\partial_x u = 0, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}, \\ u_{/t=0} = u_0(x). \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Si $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de (1).

   (b) Donner la définition d'une solution faible pour (1).

   (c) Montrer que si $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, il existe une unique solution faible $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de (1).

   (d) Montrer que si de plus, $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$ alors la solution de la question précédente satisfait $\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}}$, pour presque tout $t \geqslant 0$.

2. On considère maintenant l'équation

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f = 0, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R},\, v \in \mathbb{R}, \\ f_{/t=0} = f_0(x,v) \end{cases} \tag{2}$$

   dont la solution cherchée est une fonction $f(t,x,v)$.

   (a) Si $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, montrer qu'il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solution de (2).
   Si $f_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, on dira que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ est solution faible de (2) si

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2} f(t,x,v)\, (\partial_t \phi + v\partial_x \phi)\; dtdxdv = -\int_{\mathbb{R}^2} f_0(x,v)\phi(0,x,v)\, dxdv.$$

   (b) Montrer que la solution de la question 2.)a) est solution faible.

   (c) Si $f_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ montrer qu'il existe une unique solution faible de (2).
   On suppose dans la suite de la question que $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

   (d) Montrer que la solution faible de la question précédente est telle que $f(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ pour presque tout $t \geqslant 0$.

   (e) On pose $\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)\; dv$. Montrer que pour presque tout $t \geqslant 0$, $\rho(t) \in L^1(\mathbb{R})$.

   (f) Si de plus f_0 vérifie $\int_{\mathbb{R}} \sup_{v\in\mathbb{R}} |f_0(x,v)|\, dx < +\infty$, montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour presque tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\rho(t,x) \leqslant C/t$.

   Soit $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, tel que $U \in L^\infty$. On étudie maintenant,

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f - U'(x)\partial_v f = 0, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R},\, v \in \mathbb{R}, \\ f_{/t=0} = f_0(x,v) \end{cases} \tag{3}$$

3. On s'intéresse d'abord au système

$$\begin{cases} x'(t) = v(t), \\ v'(t) = -U'(x(t)) \end{cases} \tag{4}$$

(a) On pose $b(x, v) = (v, -U(x))^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Calculer div b.

(b) Montrer que si $(x(t), v(t))$ est solution de (4), alors

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v(t)^2 + U(x(t))\right) = 0.$$

(c) On admet que pour tout $(x, v) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale de (4) vérifiant $(x(0), v(0)) = (x, v)$. Justifier que $(x(t), (v(t))$ est définie sur $\mathbb{R}$.
On notera $(x(t), v(t)) = \Phi_t(x, v)$

(d) Justifier que Φ_t est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(e) Si $f_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, montrer qu'il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ de (3).

(f) Si de plus $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, montrer que $\|f(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, $\forall t \geqslant 0$.