Partiel du 03/03/2020

Documents et calculatrices interdits – Durée: 2h. Merci $\boxed{\textit{d'encadrer vos résultats}}$.

Exercice 1. Etant donné $c \in \mathbb{R}$, on étudie l'équation de transport

$$(S1)\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, & t > 0,\, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Rappeler la définition des solutions classiques de ce système. Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une unique solution classique, dont on donnera une expression explicite.
2. Tracer les courbes sur lesquelles la solution est constante. On dessinera x en abscisse et t en ordonnée. On fera 3 dessins : le cas $c > 0$, le cas $c < 0$ et le cas $c = 0$.
3. Rappeler (ou retrouver) la définition d'une solution faible.
4. Soit u une solution faible de $(S1)$ telle que $u \in C^1(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. Montrer que u est une solution classique.
5. Donner un exemple de solution faible qui n'est pas une solution classique.

Exercice 2. Etant donné $c > 0$, on étudie l'équation de transport

$$(S2)\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, & t > 0,\, x > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x > 0, \\ u(t,0) = a(t), & t > 0. \end{cases}$$

On suppose dans tout l'exercice que $u_0 \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et $a \in C^1(\mathbb{R}_+)$ (au sens où ces deux fonctions sont $C^0(\mathbb{R}_+)$, $C^1(\mathbb{R}_+^*)$ et leur dérivée admet une limite finie en zéro, notée $u_0'(0)$ ou $a'(0)$).

1. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$ une solution de $(S2)$. On pose $v(t,x) = u(t, x+ct)$ et $w(t,x) = u(t+\frac{x}{c}, x)$. Montrer que $v, w \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$ et que $\partial_t v = 0$ et $\partial_x w = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ une solution de $(S2)$. Montrer que $u(t,x) = u_0(x-ct)$ si $x > ct \geq 0$, $u(t,x) = a(t - \frac{x}{c})$ si $0 \leq x < ct$. Faire un dessin.
3. Montrer que le système $(S2)$ admet au plus une solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.
4. Si $a(0) = u_0(0)$ et $a'(0) = -cu_0'(0)$, montrer que le système $(S2)$ admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.
5. Montrer que si $a(0) \neq u_0(0)$ ou $a'(0) \neq -cu_0'(0)$, le système $(S2)$ n'admet aucune solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cap C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

On rappelle la définition de la convolution de deux fonctions (lorsqu'elle a un sens) :

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)dy.$$

Exercice 3. Etant donné $\alpha \in]0,1]$, on dit qu'une fonction $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est α-Hölderienne s'il existe $C > 0$ tel que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha, \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

On considère une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact, et g une fonction α-Hölderienne. Montrer que $f * g$ est bien définie et est α-Hölderienne.

Exercice 4. On rappelle que $u \in L^2(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ si u est mesurable et si $\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)dx < +\infty$. La quantité $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} := \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} u^2(x)dx}$ définit alors une norme sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. On rappelle que si $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $uv \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $|\int_{\mathbb{R}^d} uvdx| \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

On considère $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que $\|g * f\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^1}$.
2. Montrer que $\|g * f^2\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^1}\|f\|^2_{L^2}$.
3. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $|g * f(x)| \leq \sqrt{\|g\|_{L^1}}\sqrt{(|g| * f^2)(x)}$. *Indication : la preuve pourra faire intervenir la fonction* $\sqrt{|g|}$.
4. Conclure que $\|g * f\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^2}$.
5. *Bonus.* Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à support compact, telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho \geq 0$. On définit $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$. Montrer que $\|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^2} \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0^+$. *Indication : on pourra procéder en deux étapes :*
   (a) démontrer le résultat pour $f \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$ *(éventuellement en utilisant un résultat du TD1), puis*
   (b) utiliser (admis) la densité de $C^0_c(\mathbb{R}^d)$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^d)$.