Corrigé du Partiel du 03/03/2020

Documents et calculatrices interdits – Durée: 2h. Merci $\boxed{\text{d'encadrer vos résultats}}$.

Correction 1. Tout est dans le cours. Sauf peut-être la dernière question : si $u_0 = \mathbb{1}_{[0,1]}$, la solution est $u(t,x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x-ct) = \mathbb{1}_{[ct,1+ct]}(x)$, qui est solution faible mais ne peut pas être solution forte (elle n'est même pas continue).

Correction 2.

1. Les deux fonctions sont (bien définies et) $C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$ par composition de fonctions C^1, définies sur les bons ensembles. De plus, on a $\partial_t v(t,x) = \partial_t(u(t,x+ct)) = (\partial_t u)(t,x+ct) + c(\partial_x u)(t,x+ct) = (\partial_t u + c\partial_x u)(t,x+ct) = 0$ d'après l'équation. Idem pour $\partial_x w = 0$.

2. La continuité de u et la question précédente donnent v continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et $v(t,x) = v(0,x)$ pour tous $t \geq 0, x > 0$. C'est à dire $u(t,x+ct) = u(0,x) = u_0(x)$ pour tous $t \geq 0, x > 0$. C'est à dire, en posant $y = x+ct$, $u(t,y) = u(0,x) = u_0(y-ct)$ pour tous t,y tels que $t \geq 0$ et $y - ct > 0$, et donc $u(t,y) = u_0(y-ct)$ pour $y > ct$.

   De même pour w, on a $w(t,x) = w(t,0)$ pour tous $t > 0, x > 0$, donc $u(t+\frac{x}{c}, x) = u(t+0,0) = a(t)$ pour tous $t > 0, x > 0$. Et posant $\tau = t + \frac{x}{c}$, on obtient $u(\tau,x) = a(\tau - \frac{x}{c})$ pour tous τ, x tels que $x \geq 0$ et $\tau - \frac{x}{c} > 0$, i.e. $x \geq 0$ et $x < c\tau$.

3. Si $(S2)$ admet deux solutions u_1 et u_2 (avec les mêmes données u_0, a), alors la différence $u := u_1 - u_2$ satisfait $(S2)$ avec $u_0 = 0$ et $a = 0$. D'après la question qui précède (u a la bonne régularité car c'est le cas de u_1 et u_2), $u(t,x) = a(t) = 0$ pour $x < ct$ et $u(t,x) = u_0(x) = 0$ pour $x > ct$. Comme u est continue, on obtient bien $u = 0$ identiquement sur $t \geq 0, x \geq 0$, donc $u_1 = u_2$, d'où l'unicité.

4. L'unicité est donnée par la question précédente. L'existence d'une solution définie par morceaux est démontrée à la question 2. Reste à vérifier que cette solution a bien la régularité requise : c'est le cas sauf éventuellement en $x = ct$. Il faut que la solution définie à la question 2 soit continue en $x = ct$, c'est à dire $u(t,ct^+) = u_0(0^+)$ et $u(t,ct^-) = a(0^+)$ doivent être égaux. C'est la première condition. La seconde condition concerne la continuité des dérivées.

5. Réciproquement, si une des condition n'est pas satisfaite, la seule solution possible n'est pas C^0 (resp. C^1) le long de la droite $x = ct$.

Correction 3. La formule $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ car la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est L^1 à support compact (car f est à support compact et $g \in C^0$). Puis on écrit :

$$f*g(x) - f*g(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z)dz - \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(y-z)dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\left(g(x-z) - g(y-z)\right)dz$$

et donc, comme g est α-Hölderienne, pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f*g(x)-f*g(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|\,|g(x-z)-g(y-z)|\,dz \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)|C|x-y|^\alpha dz \leq C\|f\|_{L^1}|x-y|^\alpha,$$

donc $f * g$ est α-Hölderienne.

Correction 4. 1. cf TD1

2. On applique la question précédente à g et f^2, toutes deux dans L^1. On obtient $\|g*f^2\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^1}\|f^2\|_{L^1} = \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^2}^2$.

3. On écrit

$$\begin{aligned} |g*f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |g|(x-y)|f(y)|dy = \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{|g|}(x-y)(\sqrt{|g|}(x-y)|f(y)|)dy \\ &\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |g|(x-y)dy}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |g|(x-y)|f(y)|^2 dy} = \sqrt{\|g\|_{L^1}}\sqrt{(|g|*f^2)(x)}, \end{aligned}$$

après avoir appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et avoir fait le changement de variables $z = x - y$ dans la première intégrale.

4. On conclut, en utilisant les 2 questions précédentes :

$$\|g*f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |g*f(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|g\|_{L^1}(|g|*f^2)(x)dx = \|g\|_{L^1}\|g*f^2\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^1}\|g\|_{L^1}\|f\|_{L^2}^2,$$

et donc $\|g*f\|_{L^2} \leq \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^2}$. C'est à dire que l'opérateur de convolution par une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$ (ici g) est continu $L^2 \to L^2$ (avec constante de continuité $= \|g\|_{L^1}$).

5. *Bonus.*

   (a) On a vu dans le TD1 que si $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$, on a $\lim_{\epsilon\to 0} \|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0$ (en utilisant l'uniforme continuité de telles fonctions f). Ceci, combiné avec le fait que si $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$, on a $\mathrm{supp}(\rho_\epsilon * f) \subset B(0, R+\epsilon) \subset B(0, R+1)$, donne ($\lambda =$ mesure de Lebesgue)

   $$\|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^2(B(0,1))} \leq \|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\sqrt{\lambda(B(0,R+1))} \to 0,$$

   lorsque $\epsilon \to 0$, et ceci pour toute fonction $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$.

   (b) Considérons maintenant une fonction quelconque $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On fixe $\delta > 0$. L'énoncé (densité) nous donne l'existence de $f_0 \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que

   $$\|f - f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \delta/3.$$

   On écrit alors (comme dans le TD1):

   $$\|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\rho_\epsilon * f - \rho_\epsilon * f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_\epsilon * f_0 - f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f_0 - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

   D'après la question 4., $\|\rho_\epsilon * f - \rho_\epsilon * f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\rho_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|f_0 - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f_0 - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, et donc

   $$\|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\rho_\epsilon * f_0 - f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2\|f_0 - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\rho_\epsilon * f_0 - f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 2\delta/3.$$

   D'après le (a) de cette question, il existe $\epsilon_0 > 0$ t.q. pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $\|\rho_\epsilon * f_0 - f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \delta/3$. Pour $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, on a donc obtenu

   $$\|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta/3 + 2\delta/3 = \delta,$$

   ce qui conclut la preuve de $\|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0$.