CORRIGÉ DE L'EXAMEN 2023 DU COURS "INTRODUCTION AUX EDP"

STÉPHANE NONNENMACHER

Exercice 1. $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(1) La fonction peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\int_x^{x+h} f(t)\,dt &= \int \mathbb{1}_{[0,h]}(x+t) f(t)\,dt \\ &= \int \mathbb{1}_{[-h,0]}(x-t) f(t)\,dt \\ &= \alpha_h * f(x),\end{aligned}$$

avec $\alpha_h = \mathbb{1}_{[-h,0]}$.

(2) Montrons que $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ est continue p/r x. C'est bien sûr le cas si f est continue, auquel cas F est une primitive de f, qui est C^1. Tout l'enjeu consiste à étendre cette propriété de régularité à toute fonction $f \in L^1$.
Pour $x \geq 0$, on peut écrire $F(x)$ comme une intégrale dépendant d'un paramètre :

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,t)\,dt, \quad \text{avec} \\ \varphi(x,t) &= \mathbb{1}_{[0,x]}(t)\, f(t)\,.\end{aligned}$$

On veut montrer que pour tout $x_0 > 0$, F est continue en x_0. On va appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale. En effet, la fonction $\varphi(x,t)$ vérifier les propriétés nécessaires :
i) $|\varphi(x,t)| \leq |f(t)|$ pour tous x et t. La fonction dominatrice $f \in L^1$.
ii) Pour tout $t \neq x_0$, on a $\varphi(x,t) \overset{x\to x_0}{\to} \varphi(x_0,t)$. Donc cette convergence est vraie t-p.p.
On en déduit le théorème de continuité : $F(x) \overset{x\to x_0}{\to} F(x_0)$. Une preuve similaire fonctionne pour $x_0 < 0$, et en $x_0 = 0$.

(3) En utilisant le 1, on remarque que $G_h(x) = \delta_h * f(x)$, pour la fonction $\delta_h = \alpha_h/h$. Montrons que la famille de fonctions $(\delta_h)_{h\in]0,1]}$ forme une approximation de la mesure de Dirac en zéro. Tout d'abord, on a l'inégalité de Young

$$\|f * \delta_h\|_1 \leq \|f\|_1 \|\delta_h\|_1 = \|f\|_1. \tag{0.1}$$

Supposons que $f \in C_c(\mathbb{R})$, supportée dans $[-K,K]$. Alors f est uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$, alors pour $h \leq h(\epsilon)$, $|x-y| \leq h$ implique $|f(x)-f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2K+2}$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\delta_h * f(x) - f(x)| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dt \leq \frac{\epsilon}{2K+2}.$$

De plus, comme $\operatorname{supp} f \subset [-K,K]$, $\operatorname{supp}(\delta_h * f) \subset [-K-1, K+1]$, de sorte que la borne $\|\delta_h * f - f\|_\infty \leq \epsilon$ implique $\|\delta_h * f - f\|_1 \leq \epsilon$. On a donc la propriété pour une telle fonction f.
Soit maintenant $f \in L^1(\mathbb{R})$ quelconque. Choisissons $\epsilon > 0$. On peut approcher f dans L^1 par une fonction $\tilde{f} \in C_c(\mathbb{R})$, telle que $\|f - \tilde{f}\|_1 \leq \epsilon$. On applique le résultat ci-dessus à $\tilde{f}$: pour $h \leq h(\epsilon)$ (qui dépend de la fonction $\tilde{f}$), en insérant $\tilde{f}$ et $\delta_h * \tilde{f}$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\|\delta_h * f - f\|_1 \leq \|\delta_h * f - \delta_h * \tilde{f}\|_1 + \|\delta_h * \tilde{f} - \tilde{f}\|_1 + \|\tilde{f} - f\|_1.$$

Si $h \leq h(\epsilon)$, le dernier terme est $\leq \epsilon$. En utilisant la linéarité de la convolution et (0.1), le premier terme est aussi $\leq \epsilon$. Enfin, par hypothèse sur h, le second terme est $\leq \epsilon$. Donc la somme est $\leq 3\epsilon$.

Exercice 2. Champ de vitesse $b \in C^1_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, terme de "gain" $c \in C^0_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, donnée initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, équation

$$\partial_t u(t,x) + b(x) \cdot \nabla_x u(t,x) = c(x)u(t,x), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d.$$

(1) Le flot est constitué d'une famille de difféomorphismes $\phi_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ indicés par $t \in \mathbb{R}$, tels que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \qquad \partial_t \phi_t(y) = b(\phi^t(y)),$$

et au temps $t = 0$ on a $\phi_0 = id$. Autrement dit, si on fixe un point initial $y_0 \in \mathbb{R}^d$, alors $(\phi_t(y_0))_{t\in\mathbb{R}}$ décrit la solution $(y(t))_{t\in\mathbb{R}}$de l'EDO

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = b(y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{0.2}$$

(2) Comme b est dans C^1 (en particulier Lipschitz), le théorème de Cauchy-Lipschitz montre l'existence et l'unicité d'une solution locale de l'EDO ci-dessus. En particulier, la seule singularité qui peut se produire est l'explosion de $y(t)$ en temps fini. Or, comme le champ b est borné uniformément sur $\mathbb{R}^d$, la solution $y(t)$ satisfait la borne supérieure suivante :

$$|y(t) - y_0| \le \int_0^{|t|} \|b(y(s))\| \, ds \le \|b\|_{sup}|t|,$$

donc la solution $y(t)$ ne peut pas exploser en temps fini. L'EDO admet donc une solution globale.

(3) Pour $b(x) = b$ constant, l'EDO (0.2) s'écrit $\dot{y}(t) = b$, qui admit comme unique solution $y(t) = y_0 + tb$. On a donc

$$\forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \qquad \phi_t(y) = y + tb.$$

(4) Pour $a \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère l'EDO sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a(t)y(t), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{0.3}$$

Si $y_0 = 0$, la solution évidente est la solution nulle $y(t) = 0$. Supposons $y_0 \neq 0$. En supposant que $y(t)$ ne s'annulle jamais, et garde toujours le même signe, on peut réécrire l'équation en $\frac{d}{dt}(\log y(t)) = a(t)$, qu'on résout en

$$\begin{aligned} \log y(t) &= \log y_0 + \int_0^t a(s)\, ds, \\ \Longrightarrow y(t) &= y_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\, ds\right). \end{aligned}$$

Cette solution garde effectivement un signe constant, et ne s'annulle jamais.

(5) Si $v(t,x) = u(t, \phi_t(x))$, alors

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) &= \partial_t u(t, \phi_t(x)) + \partial_t \phi_t(x) \cdot \nabla_y u(t, \phi_t(x)) \\ &= \partial_t u(t, \phi_t(x)) + b(\phi^t(x)) \cdot \nabla_y u(t, \phi_t(x)) \\ &= c(\phi_t(x))\, u(t, \phi_t(x)) \\ &= c(\phi_t(x))\, v(t,x) \end{aligned}$$

(6) Dans cette équation, $x \in \mathbb{R}^d$ apparaît comme un paramètre gelé, puisqu'il n'y a pas de dérivée par rapport à x. L'équation ci-dessus est donc une EDO sur t, du même type qu'en 4 : il suffit de prendre $y_0 = v(0,x) = u(0,x) = u_0(x)$ et $a(t) = c(\phi_t(x))$, qui est bien continue. La solution de 4 nous donne alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad v(t,x) = u_0(x)\, \exp\left(\int_0^t c(\phi_s(x))\, ds\right).$$

(7) Comme l'inverse de $y = \phi_t(x)$ est donné par $x = \phi_{-t}(y)$, on retrouve la fonction $u(t,y) = v(t, \phi_{-t}(y))$ à partir de l'expression ci-dessus :

$$\begin{aligned} u(t,y) &= u_0(\phi_{-t}(y)) \exp\left(\int_0^t c(\phi_s(\phi_{-t}(y)))\, ds\right) \\ &= u_0(\phi_{-t}(y)) \exp\left(\int_0^t c(\phi_{s-t}(y))\, ds\right) \\ &= u_0(\phi_{-t}(y)) \exp\left(\int_{-t}^0 c(\phi_s(y))\, ds\right). \end{aligned}$$

Ici on a utilisé les propriétés de groupe du flot : $\phi_s \circ \phi_{-t} = \phi_{s-t}$, puis on a translaté la variable temporelle $s \to s - t$.
Remarque : par rapport au cas sans terme de gain, $c \equiv 0$, où on avait juste un transport de u entre $\phi_{-t}(y)$ et y, on ajoute ici un facteur qui représente le gain accumulé le long de la trajectoire allant de $\phi_{-t}(y)$ et y. Dans le cas où on étudie la solution aux temps négatifs $t < 0$, l'effet du gain est inversé.

(8) On refait le chemin inverse : à partir de l'expression donnée, on va montrer que cette expression satisfait bien (1). Le chemin inverse se fait plus facilement en considérant $v(t,x) = u(t, \phi_t(x))$, qui a alors pour valeurs :

$$\begin{aligned} v(t,x) &= u_0(x) \exp\left(\int_0^t c(\phi_{s-t}(\phi_t(x)))\, ds\right) \\ &= u_0(x) \exp\left(\int_0^t c(\phi_{s-t+t}(x))\, ds\right) \\ &= u_0(x) \exp\left(\int_0^t c(\phi_s(x))\, ds\right). \end{aligned}$$

On dérive par rapport à t cette expression :

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) &= u_0(x)\, c(\phi_t(x)) \exp\left(\int_0^t c(\phi_s(x))\, ds\right) \\ &= c(\phi_t(x))\, v(t,x), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\frac{d}{dt} \exp\left(\int_0^t f(s)\, ds\right) = f(t) \exp\left(\int_0^t f(s)\, ds\right)$. En revenant à la définition de $v(t,x)$, on retrouve comme en 5. :

$$\partial_t v(t,x) = \partial_t u(t, \phi_t(x)) + \partial_t \phi_t(x) \cdot \nabla_y u(t, \phi_t(x)),$$

et donc

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, \phi_t(x)) + b(\phi_t(x)) \cdot \nabla_y u(t, \phi_t(x)) &= c(\phi_t(x))\, v(t,x) \\ &= c(\phi_t(x))\, u(t, \phi_t(x)). \end{aligned}$$

En appelant $y = \phi_t(x)$, on retrouve effectivement (1) :

$$\partial_t u(t,y) + b(y) \cdot \nabla_y u(t,y) = c(y) u(t,y).$$

(9) On part de la solution obtenue en 7, et redonnée en 8 :

$$u(t,y) = u_0(\phi_{-t}(y)) \exp\left(\int_0^t c(\phi_{s-t}(y))\, ds\right).$$

On veut relier l'intégrale

$$\|u(t,\cdot)\|_p^p = \int |u(t,y)|^p\, dy$$

à $\|u_0\|_p$. Comme ϕ_{-t} est un difféomorphisme C^1, on peut procéder à un changement de variable $y = \phi_t(x)$ dans l'intégrale :

$$\int \left| u_0(\phi_{-t}(y)) \exp\left(\int_0^t c(\phi_{s-t}(y))\, ds\right)\right|^p dy = \int \left| u_0(x) \exp\left(\int_0^t c(\phi_s(x))\, ds\right)\right|^p |\det D\phi_t(x)|\, dx,$$

où $D\phi_t(x)$ dénote la matrice jacobienne de l'application $x \mapsto \phi_t(x)$. Dans le cours on avait noté ce déterminant $J(t,x) = \det D\phi_t(x)$, et on avait montré qu'il satisfait l'équation :

$$\partial_t J(t,x) = \text{div } b(\phi_t(x))\, J(t,x).$$

Pour x paramètre fixé, cette équation, est du même type que celle de 4., et a pour solution

$$J(t,x) = \exp\left(\int_0^t \text{div } b(\phi_s(x))\, ds\right), \tag{0.4}$$

en utilisant le fait que $J(0,x) = 1$. En regroupant les deux exponentielles, on obtient :

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\|_p^p &= \int |u_0(x)|^p \exp\left(p\int_0^t c(\phi_s(x))\, ds\right) \exp\left(\int_0^t \text{div } b(\phi_s(x))\, ds\right) dx \\ &= \int |u_0(x)|^p \exp\left(\int_0^t a_p(\phi_s(x))\, ds\right) dx,\end{aligned}$$

en utilisant la fonction $a_p(y) = pc(y) + \text{div } b(y)$. Comme le champ b est borné dans C^1, la fonction $y \mapsto \text{div} b(y)$ est continue et bornée. La fonction de gain c est aussi bornée, donc la fonction a_p est continue et bornée :

$$\|a_p\|_{sup} \le p\|c\|_{sup} + \|\text{div } b\|_{sup}.$$

L'intégrale dans l'exponentielle est bornée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall t \ge 0, \qquad \left|\int_0^t a_p(\phi_s(x))\, ds\right| \le \int_0^t \|a_p\|_{sup}\, ds = t\|a_p\|_{sup}.$$

En utilisant cette borne dans l'intégrale ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\|_p^p &\le \int |u_0(x)|^p \exp\left(\left|\int_0^t a_p(\phi_s(x))\right| ds\right) dx \\ &\le \int |u_0(x)|^p \exp\left(t\|a_p\|_{sup}\right) dx \\ &\le \exp\left(t\|a_p\|_{sup}\right) \int |u_0(x)|^p\, dx.\end{aligned}$$

En prenant la puissance $1/p$ de cette inégalité, on obtient :

$$\|u(t,\cdot)\|_p \le \exp\left(t\frac{\|a_p\|_{sup}}{p}\right) \|u_0\|_p.$$

On peut donc prendre $\alpha = \frac{\|a_p\|_{sup}}{p} \le \|c\|_{sup} + \frac{1}{p}\|\text{div } b\|_{sup}$.

(10) On calcule la divergence de bf par la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\text{div }(b(x)\, f(t,x)) &= \sum_{i=1}^d \partial_i\left(b_i(x)\, f(t,x)\right) \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\partial_i b_i(x)\right) f(t,x) + b_i(x)\, \partial_i f(t,x) \\ &= \left(\text{div } b(x)\right) f(t,x) + b(x)\cdot\nabla_x f(t,x).\end{aligned}$$

La fonction f satisfait donc

$$\partial_t f(t,x) + b(x)\cdot\nabla_x f(t,x) = -\text{div }(b(x))\, f(t,x).$$

Il s'agit donc d'une équation du type (1), avec la fonction de gain $c(x) = -\text{div }(b(x))$, qui est bien continue et bornée.

(11) En utilisant la solution de 7., valable lorsque $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0, \qquad f(t,y) = f_0(\phi_{-t}(y)) \exp\left(-\int_0^t \text{div } b(\phi_{s-t}(y)\, ds\right).$$

(12) Pour trouver une expression "faible" de la solution, l'idée est de multiplier l'équation (2), écrite pour une fonction $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, par une fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, et à l'intégrer sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$, et de procéder par parties :

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \varphi(t,x)\left(\partial_t f(t,x) + \operatorname{div}\ (b(x)f(t,x))\right)\, dt\, dx$$

Pour le premier terme, on intègre par parties sur la variable t sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} \varphi(t,x)\partial_t f(t,x)\, dt\, dx &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_0^\infty \varphi(t,x)\partial_t f(t,x)\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \left([\varphi(t,x)f(t,x)]_0^\infty - \int_0^\infty \partial_t\varphi(t,x) f(t,x)\, dt\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \left(-\varphi(0,x)f(0,x) - \int_0^\infty \partial_t\varphi(t,x) f(t,x)\, dt\right) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} dx \varphi(0,x)f(0,x) - \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty \partial_t\varphi(t,x) f(t,x)\, dt\, dx.\end{aligned}$$

Pour le second terme $\operatorname{div}(b(x)f(t,x)) = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(b_i(x)f(t,x))$, on va intégrer par parties chacune des variables x_i sur $\mathbb{R}$, après avoir appliqué Fubini pour isoler cette variables :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dt \int dx_1\cdots \cancel{dx_i}\cdots dx_d \int dx_i \varphi(t,x)\partial_{x_i}(b_i(x)f(t,x)) &= \int_0^\infty dt \int dx_1 \cdots \cancel{dx_i}\cdots dx_d \Big[-\int dx_i\, (\partial_{x_i}\varphi(t,x))\, b_i(x \\ &= -\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^d} dx\, \partial_{x_i}\varphi(t,x) b_i(x) f(t,x).\end{aligned}$$

En sommant tous ces termes, on obtient :

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\left(\partial_t\varphi + b\cdot\nabla_x\varphi\right)(t,x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(0,x) f_0(x)\, dx = 0. \tag{0.5}$$

Cette expression garde un sens si f_0 est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On dit alors que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$ est une solution faible de l'équation de continuité (2) si, pour toute fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, l'équation ci-dessus est satisfaite. Notons que les intégrales sont bien définies, puisque dans la première le facteur $\partial_t\varphi + b\cdot\nabla_x\varphi$ est continue à support compact, donc continue et bornée, de sorte que l'intégrand est dans $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$. De même, $\varphi(0,\cdot)$ est dans $C_c^0(\mathbb{R}^d)$, donc continue et bornée, de sorte que $\varphi(0,\cdot)f_0$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(13) Supposons qu'on ait 2 solutions faibles f et $\tilde f$, pour la même condition initiale f_0. En retranchant les deux équations satisfaites par f et $\tilde f$ associées à une fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, on obtient :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(f - \tilde f\right)(t,x)\left(\partial_t\varphi + b\cdot\nabla_x\varphi\right)(t,x)\, dx\, dt = 0.$$

D'après un lemme du cours, pour toute fonction test $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, on peut trouver un $\varphi \in C_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ tel que, sur $(t,x) \in \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^d$, on ait $\psi(t,x) = \partial_t\varphi(t,x) + b\cdot\nabla_x\varphi(t,x)$. En utilisant cette fonction test φ pour tester f et $\tilde f$, on aboutit ainsi à :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(f - \tilde f\right)(t,x)\,\psi(t,x)\, dx\, dt = 0.$$

Cette annulation étant vérifiée pour toute $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, un second lemme du cours nous dit que $f - \tilde f$ est la fonction nulle dans $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$, autrement dit $f = \tilde f$ dans $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$.

(14) Reprenons l'expression de la solution de (1), pour une fonction de gain $c(x) = -\operatorname{div} b(x)$ et donnée initiale $f_0(x)$:

$$\forall t \geq 0,\ \forall y \in \mathbb{R}^d, \qquad f(t,y) = f_0(\phi_{-t}(y))\exp\left(-\int_0^t \operatorname{div}\, b(\phi_{s-t}(y))\, ds\right).$$

Cette formule a bien un sens pour $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et elle est bien dans $L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. En se servant de la question 9, on remarque que l'intégrale

$$\begin{aligned}\exp\left(-\int_0^t \operatorname{div} b(\phi_{s-t}(y))\,ds\right) &= \exp\left(-\int_{-t}^0 \operatorname{div} b(\phi_s(y))\,ds\right)\\ &= \exp\left(\int_0^{-t} \operatorname{div} b(\phi_s(y))\,ds\right)\\ &= J(-t,y)\\ &= \det D\phi_{-t}(y),\end{aligned}$$

donc la solution ci-dessus s'écrit

$$f(t,y) = f_0(\phi_{-t}(y)) \det D\phi_{-t}(y).$$

Vérifions qu'elle est solution faible. Pour toute fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, la première intégrale vaut :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f(t,y)\,(\partial_t\varphi + b\cdot\nabla_y\varphi)\,(t,y)\,dt\,dy = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f_0(\phi_{-t}(y)) \det D\phi_{-t}(y)\,(\partial_t\varphi + b\cdot\nabla_y\varphi)\,(t,y)\,dt\,dy.$$

On a envie de procéder au changement de variable $x = \phi_{-t}(y)$, ce qui donne

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\ (\partial_t\varphi + b\cdot\nabla_y\varphi)\,(t,\phi_t(x))\,dt\,dx.$$

Comme la fonction $\varphi \in C^1$, comme vu dans 5, si on pose $\psi(t,x) = \varphi(t,\phi_t(x))$, on aura

$$\partial_t\psi(t,x) = \partial_t\varphi(t,\phi_t(x)) + b(\phi_t(x))\cdot\nabla_y\varphi(t,\phi_t(x)),$$

de sorte que l'intégrale ci-dessus se réécrit

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\,\partial_t\psi(t,x)\,dt\,dx.$$

Par Fubini on peut tout d'abord intégrer sur t. Comme f_0 est indépendante de t, on obtient pour tout x :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\left(\int_0^\infty \partial_t\psi(t,x)\,dt\right)dx &= -\int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\psi(0,x)\,dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f_0(x)\varphi(0,x)\,dx.\end{aligned}$$

Ce terme s'annulle avec le second terme de (0.5), donc on obtient bien la propriété (0.5) pour la fonction f.

Exercice 3. L'équation explicite sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ est

$$\partial_t u - x_2\partial_{x_1}u + x_1\partial_{x_2}u = 0, \qquad u(0,x) = u_0(x),$$

(1) Le champ de vecteurs est $b(x_1,x_2) = \binom{-x_2}{x_1}$ pour tout $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que ce champ n'est pas borné.

(2) Un calcul élémentaire montre que $\operatorname{div} b(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. On dit que ce champ de vecteur préserve le volume dans $\mathbb{R}^2$ (en 2 dimensions, on dit plutôt qu'il préserve l'aire).

(3) On cherche à résoudre l'EDO suivante :

$$\dot{x}(t) = b(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2.$$

En passant aux coordonnées $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, on obtient le système :

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) &= -x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t).\end{cases}$$

On peut le résoudre de plusieurs façons. La façon la plus simple est de prendre la dérivée temporelle du système ci-dessus :

$$\begin{cases}\ddot{x}_1(t) &= -\dot{x}_2(t) = -x_1(t)\\ \ddot{x}_2(t) &= \dot{x}_1(t) = -x_2(t).\end{cases}$$

On sait que les solutions de l'EDO $\ddot{y} = -y$ sont les fonctions sinusoidales

$$y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t.$$

Les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont donc de cette forme. En considérant d'abord $x_1(t)$, on a donc

$$x_1(t) = \alpha_1 \cos t + \beta_1 \sin t.$$

Les conditions initiales donnent $x_1(0) = \alpha_1$, et $\dot{x}_1(0) = \beta_1$. D'un autre côté, $\dot{x}_1(0) = -x_2(0)$, donc $\beta_1 = -x_2(0)$. On a donc identifié les deux coefficients α_1, β_1. L'expression $x_2(t) = -\dot{x}_1(t)$ permet de retrouver $x_2(t)$. Finalement, la solution de l'EDO est donnée par

$$x_1(t) = x_1(0) \cos t - x_2(0) \sin t,$$
$$x_2(t) = x_1(0) \sin t + x_2(0) \cos t.$$

On peut l'écrire sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

La matrice du membre de droite est une rotation centrée en l'origine, d'angle t ; on peut la noter R_t. Le flot ϕ_t est donc donné par cette rotation R_t (qui est une application linéaire sur x) :

$$\phi_t(x) = R_t x.$$

(4) La solution classique de l'équation (3) est donc donné par

$$u(t, x) = u_0(\phi_{-t}(x)) = u_0(R_{-t}x).$$

Si u_0 est à valeurs complexes, on peut écrire $u_0 = v_0 + iw_0$ avec $v_0, w_0 \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. L'équation (3) étant linéaire par rapport à u, on peut résoudre l'équation séparément avec les données initiales réelles v_0 et w_0, puis recombiner ces deux solutions pour obtenir la solution de donnée initiale complexe u_0 :

$$v(t, x) = v_0(R_{-t}x), \quad w(t, x) = w_0(R_{-t}x),$$

et finalement

$$u(t, x) = v(t, x) + iw(t, x) = u_0(R_{-t}x).$$

(5) Si une solution est radiale, elle doit déjà l'être au temps $t = 0$. On part donc d'une donnée initiale radiale $u_0(x) = f(|x|)$, la solution ci-dessus donne alors

$$u(t, x) = f\left(|R_{-t}x|\right) = f(|x|),$$

puisque la rotation R_t ne modifie pas la longueur de x. Cette solution est bien radiale, et stationnaire (indépendante de t). Toutes les solutions radiales sont donc stationnaires. Pour que cette solution soit C^1, il faut que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ soit C^1, avec de plus la condition $f'(0) = 0$ (sinon u_0 n'est pas différentiable en 0). Ces propriétés sont suffisantes.

(6) On veut que notre solution

$$u(t, x) = u_0(R_{-t}x) = e^{\lambda t} v(x)$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v(x)$. On remarque que le groupe des rotations $(R_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est 2π-périodique : $R_{2\pi} = Id$, donc notre solution u est elle-même 2π-périodique. Il faut donc que $e^{2\pi\lambda} = 1$, donc que $\lambda = in$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Pour un tel $\lambda = in$, on veut alors trouver u_0 et v tels que

$$u_0(R_{-t}x) = e^{int} v(x)\,.$$

Il faut nécessairement que u_0 soit à valeurs complexes. Si on utilise les coordonnées polaires (r, θ), cette équation s'écrit

$$\forall r \geq 0, \forall \theta \in [0, 2\pi[, \forall t \in \mathbb{R}_+, \qquad u_0(r, \theta - t) = e^{int} v(r, \theta).$$

En fixant $\theta = 0$ et en variant t, cela donne

$$u_0(r, -t) = e^{int} v(r, 0),$$

donc u_0 est de la forme

$$u_0(r, \theta) = e^{-in\theta} v(r, 0).$$

La fonction v est donnée automatiquement : $v = u_0$. Une fois fixé $\lambda = in$, la solution est définie par une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, qui définit $v(r, 0)$. La solution est alors donnée par
$$u(t, r, \theta) = e^{in(t-\theta)} f(r)\,.$$
Quelles sont les conditions pour que cette solution soit dans $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$?
Si $n = 0$, on retombe sur la solutioin stationnaire du 5, et il suffit que f soit C^1 avec $f'(0) = 0$.
Si $n \neq 0$, il faut déjà s'assurer que u soit bien définie en $r = 0$; il faut pour cela que $f(0) = 0$.
Pour que u_0 soit C^1 sur $\mathbb{R}^2$, il faut que f soit C^1 sur $\mathbb{R}_+$, mais en plus satisfaire une condition en $r = 0$. Pour déterminer cette condition, on doit réécrire u_0 en fonction de x. Pour $n > 0$, elle prend la forme :
$$u_0(x) = \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|}\right)^n f(|x|) = \left(\frac{x_1 + ix_2}{|x|}\right)^n \big(f(0) + |x|f'(0) + o(|x|)\big)\,, \quad \text{lorsque } x \to 0.$$
On retrouve la condition $f(0) = 0$ pour que la fonction ait une limite en $x \to 0$. Pour qu'elle ait une partie linéaire en $x = 0$ (donc qu'elle y soit dérivable), on a 2 cas de figure :
i) soit $n = 1$. Alors $u_0(x) = (x_1 + ix_2)f'(0) + o(|x|)$ est dérivable en $x = 0$, quelle que soit la valeur de $f'(0)$.
ii) soit $n > 1$. Alors u_0 a une partie linéaire ssi $f'(0) = 0$: sa différentielle s'annulle en l'origine.
Le cas $n < 0$ se traite de la même façon, en remarquant que $e^{in\theta} = \left(\frac{x_1 - ix_2}{|x|}\right)^{-n}$. On distingue dont le cas $n = -1$ et $n < -1$.