Examen du 9/05/2023

Documents et calculatrices interdits – Durée: 2h. Merci $\boxed{\textit{d'encadrer vos résultats}}$.
Les 3 exercices sont indépendants

Exercice 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1. Pour $h \in \mathbb{R}$, exprimer la fonction $x \mapsto \int_x^{x+h} f(t)dt$ comme le produit de convolution de f par une fonction α_h à déterminer.

   On pose $F(x) := \int_0^x f(t)dt$.

2. La fonction F est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (on justifiera sa réponse).

3. Pour $h > 0$, on pose $G_h(x) := \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$. Montrer que $G_h \to f$ dans $L^1(\mathbb{R})$ lorsque $h \to 0^+$.

Exercice 2. On considère $b \in C_b^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$, $c \in C_b^0(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ (fonctions continues bornées), une donnée initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ et l'équation

$$\partial_t u(t,x) + b(x)\cdot\nabla u(t,x) = c(x)u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^d, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

1. Rappeler la définition du flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ du champ de vecteurs b.

   On rappelle que l'application $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$ est de classe C^1 partout où le flot est défini.

2. Rappeler pourquoi, sous les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ le $\phi_t(x)$ est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Calculer explicitement $\phi_t(x)$ lorsque b est constant.

4. Soit $a \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Expliciter la solution de l'équation différentielle ordinaire $\frac{d}{dt}y(t) = a(t)y(t)$ satisfaisant $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

5. Soit u une solution de (1) et $v(t,x) := u(t,\phi_t(x))$. Montrer que v est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on explicitera.

6. Résoudre cette équation.

7. En déduire que (1) admet au plus une solution u, dont on donnera une expression explicite.

8. On pose maintenant
$$u(t,x) := u_0 \circ \phi_{-t}(x) \exp\left(\int_0^t c\left(\phi_{s-t}(x)\right) ds\right).$$
   Montrer que u est une solution de l'équation (1). *Indication : on pourra s'intéresser à la fonction* $v(t,x) := u(t,\phi_t(x))$. Conclure que l'équation (1) admet une unique solution.

9. Soit $p \in [1,+\infty]$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que pour tout $t \geq 0$, la solution u de (1) vérifie $\|u(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq e^{\alpha t}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ où α est à déterminer.

   On s'intéresse maintenant à l'équation appelée "de continuité"

$$\partial_t f(t,x) + \operatorname{div}\big(b(x)f(t,x)\big) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^d, \quad f(0,x) = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2}$$

10. Montrer que l'équation (2) se reformule sous la forme (1), où l'on explicitera la fonctions c.

11. En déduire pour $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ l'expression de l'unique solution de (2).

12. On se place dans la situation où $f_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$. Définir une notion de solution faible pour (2).
13. Montrer que (2) admet au plus une solution faible.
14. Montrer qu'il existe une solution faible, dont on donnera une expression explicite.

Exercice 3. On considère en dimension 2 d'espace (où l'on note $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$) l'équation de transport

$$\partial_t u(t,x) - x_2 \partial_{x_1} u(t,x) + x_1 \partial_{x_2} u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^2, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

1. Identifier le champ de vecteurs $b(x)$ impliqué dans cette équation.
2. Calculer la divergence de b.
3. Calculer le flot ϕ_t de b.
4. En déduire l'expression explicite de la solution de (3) si on suppose $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Montrer que la formule obtenue définit toujours une solution classique de (3) si $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ (c'est à dire, est à valeurs complexes).
5. On dit que u est une solution radiale de (3) s'il existe une fonction $g \in C^1(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+;\mathbb{R})$ telle que $u(t,x) = g(t,|x|)$, où l'on a noté $|x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Décrire toutes les solutions radiales de cette équation.
6. On cherche maintenant les solutions u de (3) de la forme $u(t,x) = e^{\lambda t} v(x)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ (c'est à dire, à valeurs complexes). Caractériser les $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ tels que (3) admette $u(t,x) = e^{\lambda t} v(x)$ pour solution.