Examen du 26/04/2022

Documents et calculatrices interdits – Durée: 2h. Merci $\boxed{\textit{d'encadrer vos résultats}}$.

Exercice 1. On considère dans cet exercice l'équation

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x u^\varepsilon - \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad u^\varepsilon(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre. On suppose que $u_0 \in C_c^2(\mathbb{R})$ ne dépend pas de ε et on s'intéresse uniquement aux solutions classiques de (1), c'est à dire aux fonctions $u^\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ qui satisfont (1) ponctuellement.

1. Montrer que u^ε est solution de (1) si et seulement si $v^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon(t, x+t)$ est solution d'une équation à déterminer.
2. On pose $w(t,x) := v^\varepsilon(\alpha t, x)$. Déterminer $\alpha > 0$ en fonction de ε de sorte que w soit solution de

$$\partial_t w - \partial_x^2 w = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad w(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

   On rappelle maintenant que (2) admet pour unique solution la fonction w définie pour $t > 0$ par $w(t,x) = (G_t * u_0)(x)$ où $G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$.
3. Montrer que l'équation (1) admet une unique solution dont on donnera l'expression explicite.
4. Rappeler l'expression explicite de la solution de

$$\partial_t u + \partial_x u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

5. Conclure que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ fixés, la solution u^ε de (1) vérifie $u^\varepsilon(t,x) \to u(t,x)$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$, où u est l'unique solution de (3).

Exercice 2. On considère la loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0 \tag{4}$$

avec $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ convexe.

1. (a) Rappeler la définition de solution forte et de solution faible de (4).
   (b) Montrer que toute solution forte de (4) est solution faible.
2. Etant donnés $u^-, u^+ \in \mathbb{R}$ tels que $u^+ \neq u^-$, on considère dans toute cette question la fonction stationnaire $u(t,x)$ définie par :

$$u(t,x) = u^- \text{ si } x < 0, \quad u(t,x) = u^+ \text{ si } x > 0. \tag{5}$$

   (a) Montrer que $u(t,x)$ est solution faible de (4) si et seulement si $f(u^-) = f(u^+)$.
   (b) On considère dans cette question (et uniquement dans cette question) la fonction $f(s) = \frac{s^2}{2}$. Dessiner les courbes caractéristiques associées à u dans les deux cas suivants :
      i. $u^- < u^+$,
      ii. $u^+ < u^-$.

(c) On rappelle qu'on dit que u est solution entropique de (4) si $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et pour tout couple entropie/flux d'entropie (η, q) de classe C^1 (i.e. tels que $q' = \eta' f'$) avec η convexe, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\partial_t \varphi(t,x) + q(u(t,x))\partial_x \varphi(t,x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u(0,x))\varphi(0,x) dx \geq 0, \tag{6}$$

pour tout $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ avec $\varphi \geq 0$.

Montrer que la fonction u définie en (5) est solution entropique si et seulement si $q(u^-) - q(u^+) \geq 0$ pour tout couple entropie/flux d'entropie (η, q) de classe C^1.

On admet dans un premier temps le lemme suivant.

Lemme 1. On suppose f convexe. Soient (η, q) de classe $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tels que $q' = \eta' f'$ avec η convexe. Alors, pour tout $a < b$

$$(b-a) \int_a^b q'(s) ds \geq \left(\int_a^b \eta'(s) ds \right) \left(\int_a^b f'(s) ds \right).$$

(d) On suppose que u définie en (5) est solution faible de (4). Donner une condition suffisante sur u^+, u^- pour que u soit solution entropique. Commenter, à la lumière des dessins de la question 1.(b).

3. On considère maintenant $\sigma > 0$ et $u^-, u^+ \in \mathbb{R}$ tels que $u^+ \neq u^-$. On souhaite savoir si

$$u(t,x) = u^- \text{ si } x < \sigma t, \quad u(t,x) = u^+ \text{ si } x > \sigma t \tag{7}$$

est solution entropique de (4).

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante reliant (u^-, u^+, σ) pour que u soit solution faible.

(b) Montrer que u est solution entropique si et seulement si

$$q(u^+) - q(u^-) \leq \sigma(\eta(u^+) - \eta(u^-))$$

pour tout couple entropie/flux d'entropie (η, q) de classe C^1 avec η convexe. *Indication : on pourra faire un dessin, écrire* $\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\partial_t \varphi(t,x) dx dt = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_-} + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+}$ *et distinguer plusieurs régions dans les intégrales.*

(c) On suppose que la fonction u définie par (7) est solution faible de (4). Donner une condition suffisante sur u^+, u^- pour que u soit solution entropique.

4. On va maintenant démontrer le lemme 1. On suppose ses hypothèses satisfaites.

(a) Montrer que

$$(b-a) \int_a^b q'(x) dx = \int_a^b \int_a^b f'(x)(\eta'(x) - \eta'(y)) dx dy + \int_a^b f'(x) dx \int_a^b \eta'(y) dy.$$

(b) En déduire que

$$(b-a) \int_a^b q'(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b (f'(x) - f'(y))(\eta'(x) - \eta'(y)) dx dy + \int_a^b f'(x) dx \int_a^b \eta'(y) dy.$$

(c) Soit $F(x,y) = (f'(x) - f'(y))(\eta'(x) - \eta'(y))$ et $\mathcal{T} = \{(x,y) \in [a,b]^2, y \leq x\}$. Montrer que $\int_{[a,b]^2} F(x,y) dx dy = 2 \int_{\mathcal{T}} F(x,y) dx dy$.

(d) Conclure la preuve du lemme.