Examen du 26/04/2022

Documents et calculatrices interdits – Durée: 2h. Merci $\boxed{\textit{d'encadrer vos résultats}}$.

Exercice 1. On considère dans cet exercice l'équation

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x u^\varepsilon - \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad u^\varepsilon(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre. On suppose que $u_0 \in C_c^2(\mathbb{R})$ ne dépend pas de ε et on s'intéresse uniquement aux solutions classiques de (1), c'est à dire aux fonctions $u^\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ qui satisfont (1) ponctuellement.

1. Montrer que u^ε est solution de (1) si et seulement si $v^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon(t, x+t)$ est solution d'une équation à déterminer.
2. On pose $w(t,x) := v^\varepsilon(\alpha t, x)$. Déterminer $\alpha > 0$ en fonction de ε de sorte que w soit solution de

$$\partial_t w - \partial_x^2 w = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad w(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

   On rappelle maintenant que (2) admet pour unique solution la fonction w définie pour $t > 0$ par $w(t,x) = (G_t * u_0)(x)$ où $G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$.
3. Montrer que l'équation (1) admet une unique solution dont on donnera l'expression explicite.
4. Rappeler l'expression explicite de la solution de

$$\partial_t u + \partial_x u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

5. Conclure que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ fixés, la solution u^ε de (1) vérifie $u^\varepsilon(t,x) \to u(t,x)$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$, où u est l'unique solution de (3).

Correction 1. 1. Dérivation des fonctions composées : u^ε est solution de (1) si et seulement si $v^\varepsilon(t,x) := u^\varepsilon(t,x+t)$ est solution de

$$\partial_t v^\varepsilon - \varepsilon \partial_x^2 v^\varepsilon = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad v^\varepsilon(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Pour $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$, la fonction $w(t,x) := v^\varepsilon(\alpha t, x)$ est solution de (2) (si et seulement si v^ε est solution de l'équation précédente).
3. Comme $w(t,x) = (G_t * u_0)(x)$ est l'unique solution de, l'équation (1) admet pour unique solution

$$u^\varepsilon(t,y) = (G_{\varepsilon t} * u_0)(y - t).$$

4. L'unique solution de (3) est donnée par $u(t,x) = u_0(x-t)$.
5. Pour $t = 0$, les deux solutions coincident. Pour $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ fixés, on a $u^\varepsilon(t,y) = (G_{\varepsilon t} * u_0)(y - t) \to_{\varepsilon \to 0^+} u_0(y-t)$ car $G_{\varepsilon t}$ est une approximation de l'identité et u_0 est continue à support compact.

Exercice 2. On considère la loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0 \tag{4}$$

avec $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ convexe.

1. (a) Rappeler la définition de solution forte et de solution faible de (4).
   (b) Montrer que toute solution forte de (4) est solution faible.

2. Etant donnés $u^-, u^+ \in \mathbb{R}$ tels que $u^+ \neq u^-$, on considère dans toute cette question la fonction stationnaire $u(t,x)$ définie par :

$$u(t,x) = u^- \text{ si } x < 0, \quad u(t,x) = u^+ \text{ si } x > 0. \tag{5}$$

   (a) Montrer que $u(t,x)$ est solution faible de (4) si et seulement si $f(u^-) = f(u^+)$.
   (b) On considère dans cette question (et uniquement dans cette question) la fonction $f(s) = \frac{s^2}{2}$. Dessiner les courbes caractéristiques associées à u dans les deux cas suivants :
      i. $u^- < u^+$,
      ii. $u^+ < u^-$.
   (c) On rappelle qu'on dit que u est solution entropique de (4) si $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et pour tout couple entropie/flux d'entropie (η, q) de classe C^1 (i.e. tels que $q' = \eta' f'$) avec η convexe, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x) + q(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u(0,x))\varphi(0,x)dx \geq 0, \tag{6}$$

   pour tout $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ avec $\varphi \geq 0$.
   Montrer que la fonction u définie en (5) est solution entropique si et seulement si $q(u^-) - q(u^+) \geq 0$ pour tout couple entropie/flux d'entropie (η, q) de classe C^1.
   On admet dans un premier temps le lemme suivant.
   Lemme 1. On suppose f convexe. Soient (η, q) de classe $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tels que $q' = \eta' f'$ avec η convexe. Alors, pour tout $a < b$

$$(b-a)\int_a^b q'(s)ds \geq \left(\int_a^b \eta'(s)ds\right)\left(\int_a^b f'(s)ds\right).$$

   (d) On suppose que u définie en (5) est solution faible de (4). Donner une condition suffisante sur u^+, u^- pour que u soit solution entropique. Commenter, à la lumière des dessins de la question 1.(b).

3. On considère maintenant $\sigma > 0$ et $u^-, u^+ \in \mathbb{R}$ tels que $u^+ \neq u^-$. On souhaite savoir si

$$u(t,x) = u^- \text{ si } x < \sigma t, \quad u(t,x) = u^+ \text{ si } x > \sigma t \tag{7}$$

   est solution entropique de (4).
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante reliant (u^-, u^+, σ) pour que u soit solution faible.
   (b) Montrer que u est solution entropique si et seulement si

$$q(u^+) - q(u^-) \leq \sigma(\eta(u^+) - \eta(u^-))$$

   pour tout couple entropie/flux d'entropie (η, q) de classe C^1 avec η convexe. *Indication : on pourra faire un dessin, écrire* $\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x)dxdt = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_-} + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}$ *et distinguer plusieurs régions dans les intégrales.*
   (c) On suppose que la fonction u définie par (7) est solution faible de (4). Donner une condition suffisante sur u^+, u^- pour que u soit solution entropique.

4. On va maintenant démontrer le lemme 1. On suppose ses hypothèses satisfaites.
   (a) Montrer que

$$(b-a)\int_a^b q'(x)dx = \int_a^b\int_a^b f'(x)(\eta'(x) - \eta'(y))dxdy + \int_a^b f'(x)dx\int_a^b \eta'(y)dy.$$

(b) En déduire que

$$(b-a)\int_a^b q'(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b (f'(x)-f'(y))(\eta'(x)-\eta'(y))dxdy + \int_a^b f'(x)dx\int_a^b \eta'(y)dy.$$

(c) Soit $F(x,y) = (f'(x)-f'(y))(\eta'(x)-\eta'(y))$ et $\mathcal{T} = \{(x,y)\in[a,b]^2, y\leq x\}$. Montrer que $\int_{[a,b]^2} F(x,y)dxdy = 2\int_{\mathcal{T}} F(x,y)dxdy$.

(d) Conclure la preuve du lemme.

Correction 2. 1. C'est du cours.

2. (a) C'est la condition de Rankine-Hugoniot avec vitesse de choc $\sigma = 0$.

(b) Cours.

(c) On part de

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x) + q(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u(0,x))\varphi(0,x)dx \geq 0,$$

pour tout $\varphi\in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ avec $\varphi\geq 0$. Puis on intègre par parties :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x)dxdt &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_-} \eta(u^-)\partial_t\varphi(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} \eta(u^+)\partial_t\varphi(t,x)dxdt\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \eta(u(0,x))\varphi(0,x)dx.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} q(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)dxdt &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_-} q(u^-)\partial_x\varphi(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+} q(u^+)\partial_x\varphi(t,x)dxdt\\ &= q(u^-)\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(t,0)dt - q(u^+)\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(t,0)dt.\end{aligned}$$

En insérant les 2 dernières lignes dans la définition plus haut, on récupère

$$(q(u^-)-q(u^+))\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(t,0)dxdt \geq 0, \qquad \text{pour tout } \varphi\in C_c^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \varphi\geq 0,$$

ce qui est équivalent à $q(u^-)-q(u^+)\geq 0$ (après avoir choisi φ non identiquement nulle sur $x=0$).

(d) Comme u est solution faible de (4), $f(u^+) = f(u^-)$. Si on applique le lemme (qui utilise convexité de f) à $b = u^- > u^+ = a$, alors le second membre est nul et on récupère $(u^- - u^+)(q(u^-)-q(u^+))\geq 0$ ce qui implique $q(u^-)-q(u^+)\geq 0$ et d'après la question précédente, le choc est alors entropique. La condition $u^- > u^+$ (en plus de Rankine-Hugoniot) est donc suffisante pour que le choc soit entropique.

(a) C'est à nouveau la condition de Rankine-Hugoniot : $\sigma = \frac{f(u^+)-f(u^-)}{u^+-u^-}$.

(b) Il s'agit de refaire le calcul d'intégration par parties plus haut dans un cadre un peu plus compliqué (mais essentiellement traité en cours) puisque le saut est en $x = \sigma t$. En particulier il faut écrire $\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \eta(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x)dxdt = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_-} + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}_+}$ et distinguer plusieurs régions dans les intégrales avant d'intégrer par parties soit en temps soit en espace.

(c) En utilisant à nouveau le lemme (donc la convexité de f), on montre comme précédemment que $u^- > u^+$ (en plus de Rankine-Hugoniot) est une condition suffisante pour que le choc soit entropique.

3. (a) On écrit

$$\int_a^b q'(x)dx = \int_a^b f'(x)\eta'(x)dx = \int_a^b f'(x)(\eta'(x)-\eta'(y))dx + \eta'(y)\int_a^b f'(x)dx,$$

puis on intègre en $y \in [a,b]$ pour obtenir

$$(b-a)\int_a^b q'(x)dx = \int_a^b \int_a^b f'(x)(\eta'(x)-\eta'(y))dxdy + \int_a^b f'(x)dx \int_a^b \eta'(y)dy.$$

(b) On remarque que

$$\int_a^b \int_a^b f'(x)(\eta'(x)-\eta'(y))dxdy = \int_a^b \int_a^b f'(y)(\eta'(y)-\eta'(x))dxdy,$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_a^b f'(x)(\eta'(x)-\eta'(y))dxdy &= \frac{1}{2}\left(\int_a^b \int_a^b f'(x)(\eta'(x)-\eta'(y))dxdy + \int_a^b \int_a^b f'(y)(\eta'(y)-\eta'(x))dxdy\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b (f'(x)-f'(y))(\eta'(x)-\eta'(y))dxdy,\end{aligned}$$

d'où

$$(b-a)\int_a^b q'(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b (f'(x)-f'(y))(\eta'(x)-\eta'(y))dxdy + \int_a^b f'(x)dx \int_a^b \eta'(y)dy.$$

(c) Si on pose $F(x,y) = (f'(x)-f'(y))(\eta'(x)-\eta'(y))$, on remarque que F est symétrique par rapport à la diagonale $\{(x,x), x \in [a,b]\}$, c'est à dire $F(y,x) = F(x,y)$. Si $\mathcal{T} = \{(x,y) \in [a,b]^2, y \leq x\}$, on a donc

$$\int_{[a,b]^2} F(x,y)dxdy = 2\int_{\mathcal{T}} F(x,y)dxdy.$$

(d) Autrement dit, on a

$$\frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b (f'(x)-f'(y))(\eta'(x)-\eta'(y))dxdy = \int_{\mathcal{T}} (f'(x)-f'(y))(\eta'(x)-\eta'(y))dxdy.$$

Mais si $(x,y) \in \mathcal{T}$, $y \leq x$ et comme f et η sont convexes f' et η' sont croissantes de sorte que

$$(f'(x)-f'(y))(\eta'(x)-\eta'(y)) \geq 0, \qquad \text{pour } (x,y) \in \mathcal{T}.$$

On en déduit donc

$$(b-a)\int_a^b q'(x)dx \geq \int_a^b f'(x)dx \int_a^b \eta'(y)dy.$$