Examen du 11/05/2021

Documents et calculatrices interdits – Durée: 2h. Merci $\boxed{\textit{d'encadrer vos résultats}}$.

On rappelle la définition de la convolution de deux fonctions (lorsqu'elle a un sens) :

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)dy.$$

Les exercices 1 et 2 ne sont *pas* indépendants.

Exercice 1. On considère dans cet exercice une fonction quelconque $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho \geq 0$.

On rappelle que si on suppose de plus que ρ est à support compact dans $\mathbb{R}^d$, et si on pose $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$, on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \text{pour tout } f \in C_c^0(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \text{pour tout } f \in L^1(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que (2) est vérifiée sans l'hypothèse de support compact.

Pour $A > 0$ suffisamment grand, on pose

$$\rho^A(x) = \mathbb{1}_{B(0,A)}(x)\rho(x)\left(\int_{B(0,A)} \rho\right)^{-1}, \quad \text{et} \quad \rho_\epsilon^A(x) = \epsilon^{-d}\rho^A(x/\epsilon).$$

1. Montrer que $\|\rho^A - \rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0$ lorsque $A \to +\infty$.
2. Montrer que si $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho \geq 0$, alors $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$, vérifie (2). (Autrement dit, montrer que l'hypothèse de support compact n'est pas nécessaire).

Exercice 2. Pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$G(t,x) = G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

et on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\|G_t * f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ lorsque $t \to 0^+$ (ici, et dans tout l'exercice, $*$ est la convolution dans la variable $x \in \mathbb{R}$ seulement).
2. Calculer $\partial_t G$, $\partial_x G$ et $\partial_x^2 G$ et donner une équation aux dérivées partielles satisfaite par G pour $t > 0, x \in \mathbb{R}$.
3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $u(t,x) = (G_t * f)(x)$ pour $(t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la fonction u est bien définie et que pour tout $t > 0$, $u(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $u \in C^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$, et que ses dérivées partielles satisfont une équation à déterminer.
   (c) Montrer que pour tout $t > 0$, $\|u(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ où $C > 0$ est à déterminer.

4. Montrer que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_\epsilon^\infty \int_{\mathbb{R}} G(t,x) \left(\partial_t \varphi(t,x) + \partial_x^2 \varphi(t,x)\right) dx dt \to -\varphi(0,0), \quad \text{lorsque } \ \epsilon \to 0^+.$$

Indication : on admettra que (1) *est satisfaite pour tout* $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ *tel que* $\rho \geq 0, \int \rho = 1$.

5. Montrer que pour tout $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $u(t,x) = (G_t * u_0)(x)$ vérifie

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} u(t,x) \left(\partial_t \varphi(t,x) + \partial_x^2 \varphi(t,x)\right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(0,x) dx = 0, \qquad \text{pour tout } \varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2). \quad (3)$$

6. Soit $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$. Montrer que toute fonction $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ qui vérifie (3) est solution forte d'une EDP d'évolution à déterminer.

Exercice 3. On définit deux applications $b_\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $b_+(x,y) = (y, -x)$ et $b_-(x,y) = (x, -y)$.

1. Les résultats du cours concernant existence et unicité pour l'équation de transport par un champs de vecteurs b s'appliquent-ils directement à ces champs de vecteurs $b_\pm$?

2. Montrer que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, les équation différentielles

$$\dot{X}(t) = b_\pm(X(t)), \quad X(0) = (x_0, y_0),$$

admettent une unique solution. Montrer que ces solutions sont définies globalement en temps.

3. Expliciter le flot $\Phi_t^\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ces équation différentielles et montrer que ce flot est une fonction C^∞ de (t,x,y). Dessiner les courbes intégrales de $b_\pm$.

4. Montrer que pour tout $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ l'EDP

$$\partial_t u + b_\pm \cdot \nabla u = 0, \qquad \text{pour } (t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \quad u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (4)$$

admet une unique solution, dont on donnera une expression explicite. NB : ∇ est le gradient dans les variables x, y.

Pour $u_0, v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on appelle corrélation de u_0, v_0 les fonctions

$$C^\pm_{(u_0,v_0)}(t) := \int_{\mathbb{R}^2} u_\pm(t,x,y) v_0(x,y) dx dy,$$

où $u_\pm$ est la solution de (4), respectivement pour le champ de vecteur $b_\pm$.

5. Montrer que $C^+_{(u_0,v_0)}(t)$ est une fonction périodique dont on donnera la période.

6. Montrer que pour tous $u_0, v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $C^-_{(u_0,v_0)}(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ à une vitesse que l'on précisera.

7. Montrer que si $\partial_x^j u_0(0,y) = 0$ pour tout $j \leq k$ et tout $y \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante $K > 0$ telle que $|C^-_{(u_0,v_0)}(t)| \leq K e^{-(k+2)t}$ lorsque $t \to +\infty$.

8. Montrer que pour tous $u_0, v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$C^-_{(u_0,v_0)}(t) = \sum_{k,n \in \mathbb{N}, k+n \leq N} \alpha(n,k) e^{-(k+n+1)t} + O(e^{-(N+2)t}), \qquad \text{lorsque } t \to +\infty$$

avec $\alpha(k,n)$ des coefficients à déterminer.