Examen du 11/05/2021

Documents et calculatrices interdits – Durée: 2h. Merci $\boxed{\textit{d'encadrer vos résultats}}$.

On rappelle la définition de la convolution de deux fonctions (lorsqu'elle a un sens) :

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)v(y)dy.$$

Les exercices 1 et 2 ne sont *pas* indépendants.

Exercice 1. On considère dans cet exercice une fonction quelconque $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho \geq 0$.

On rappelle que si on suppose de plus que ρ est à support compact dans $\mathbb{R}^d$, et si on pose $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$, on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \text{pour tout } f \in C_c^0(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \text{pour tout } f \in L^1(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que (2) est vérifiée sans l'hypothèse de support compact.

Pour $A > 0$ suffisamment grand, on pose

$$\rho^A(x) = \mathbb{1}_{B(0,A)}(x)\rho(x)\left(\int_{B(0,A)} \rho\right)^{-1}, \quad \text{et} \quad \rho_\epsilon^A(x) = \epsilon^{-d}\rho^A(x/\epsilon).$$

1. Montrer que $\|\rho^A - \rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0$ lorsque $A \to +\infty$.

2. Montrer que si $\rho \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$ et $\rho \geq 0$, alors $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\rho(x/\epsilon)$, vérifie (2). (Autrement dit, montrer que l'hypothèse de support compact n'est pas nécessaire).

Correction 1. 1. Par convergence dominée.

2. Soit $\nu > 0$. On décompose

$$\begin{aligned}
\|\rho_\epsilon * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\rho_\epsilon * f - \rho_\epsilon^A * f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_\epsilon^A * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|\rho_\epsilon - \rho_\epsilon^A\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_\epsilon^A * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|\rho - \rho^A\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|\rho_\epsilon^A * f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Puis, pour A assez grand, le premier terme est $\leq \nu$ d'après la question précédente. Pour ce A là, le deuxième terme tend vers 0 (TD1) donc est $\leq \nu$ lorsque $\epsilon \to 0$.

Exercice 2. Pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$G(t,x) = G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

et on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\|G_t * f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \to 0$ lorsque $t \to 0^+$ (ici, et dans tout l'exercice, $*$ est la convolution dans la variable $x \in \mathbb{R}$ seulement).

2. Calculer $\partial_t G$, $\partial_x G$ et $\partial_x^2 G$ et donner une équation aux dérivées partielles satisfaite par G pour $t > 0, x \in \mathbb{R}$.

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On pose $u(t,x) = (G_t * f)(x)$ pour $(t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que la fonction u est bien définie et que pour tout $t > 0$, $u(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $u \in C^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$, et que ses dérivées partielles satisfont une équation à déterminer.

   (c) Montrer que pour tout $t > 0$, $\|u(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ où $C > 0$ est à déterminer.

4. Montrer que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_\epsilon^\infty \int_\mathbb{R} G(t,x)\left(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\right) dxdt \to -\varphi(0,0), \quad \text{lorsque } \epsilon \to 0^+.$$

   Indication : on admettra que (1) *est satisfaite pour tout $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\rho \geq 0, \int \rho = 1$.*

5. Montrer que pour tout $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $u(t,x) = (G_t * u_0)(x)$ vérifie

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u(t,x)\left(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\right) dxdt + \int_\mathbb{R} u_0(x)\varphi(0,x)dx = 0, \quad \text{pour tout } \varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^2). \quad (3)$$

6. Soit $u_0 \in C^0(\mathbb{R})$. Montrer que toute fonction $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ qui vérifie (3) est solution forte d'une EDP d'évolution à déterminer.

Correction 2. 1. Il s'agit d'une conséquence de l'exercice précédent

2. On pose $\tilde{G} = \sqrt{4\pi}G$ et on a $\partial_t\tilde{G}(t,x) = \left(-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4t^{5/2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}$ et $\partial_x\tilde{G}(t,x) = -\frac{x}{2t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ et $\partial_x^2\tilde{G}(t,x) = \left(-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{x^2}{4t^{5/2}}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}$ soit $\partial_x^2 G = \partial_t G$.

3. Par dérivation sous l'intégrale (localement sur $[a,b] \times \mathbb{R}$ avec $0 < a < b < \infty$), on a

$$\partial_t u(t,x) = \int_\mathbb{R} \partial_t G(t,x-y)f(y)dy, \quad \partial_x u(t,x) = \int_\mathbb{R} (\partial_x G)(t,x-y)f(y)dy,$$

   et idem pour les dérivées successives (et dérivées croisées), donc $u \in C^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$ et $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$. De plus $\|G_t * f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|G_t\|_{L^1(\mathbb{R})}\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

4. Par intégration par parties, en utilisant le fait que G est solution de l'équation de la chaleur loin de $t = 0$, on déduit

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^\infty \int_\mathbb{R} G(t,x)\left(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\right) dxdt &= \left[\int_\mathbb{R} G(t,x)\varphi(t,x)dx\right]_\epsilon^\infty \\ &= -\int_\mathbb{R} G(\epsilon,x)\varphi(\epsilon,x)dx \to -\varphi(0,0),\end{aligned}$$

   en utilisant la continuité de φ en zéro, le fait que $\int_\mathbb{R} G(\epsilon,x)\varphi(0,x)dx = (G_\epsilon * \varphi(0,\cdot))(0)$ (par parité de G en x) et (1).

5. Utilise Fubini et la question précédente : on écrit $u(t,x) = \int_\mathbb{R} u_0(y)G_t(x-y)dy$ et Fubini donne

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u(t,x)\left(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\right) dxdt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} u_0(y) \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} G(t,x-y)\left(\partial_t\varphi(t,x) + \partial_x^2\varphi(t,x)\right) dxdtdy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} u_0(y) \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} G(t,x)\left(\partial_t\varphi(t,x+y) + \partial_x^2\varphi(t,x+y)\right) dxdtdy \\ &= -\int_{\mathbb{R}_+} u_0(y)\varphi(0,y)dy,\end{aligned}$$

   où on a utilisé la question précédente dans la dernière égalité.

6. On fait les intégrations par parties pour faire porter les dérivées sur u, et on conclut avec le lemme super-important comme dans le cours que u est solution de $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ et $u(0,\cdot) = u_0$.

Exercice 3. On définit deux applications $b_\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $b_+(x,y) = (y,-x)$ et $b_-(x,y) = (x,-y)$.

1. Les résultats du cours concernant existence et unicité pour l'équation de transport par un champs de vecteurs b s'appliquent-ils directement à ces champs de vecteurs $b_\pm$?
2. Montrer que pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, les équation différentielles

$$\dot{X}(t) = b_\pm(X(t)), \quad X(0) = (x_0,y_0),$$

admettent une unique solution. Montrer que ces solutions sont définies globalement en temps.

3. Expliciter le flot $\Phi_t^\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ces équation différentielles et montrer que ce flot est une fonction C^∞ de (t,x,y). Dessiner les courbes intégrales de $b_\pm$.
4. Montrer que pour tout $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ l'EDP

$$\partial_t u + b_\pm \cdot \nabla u = 0, \qquad \text{pour } (t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \quad u(0,x,y) = u_0(x,y), \tag{4}$$

admet une unique solution, dont on donnera une expression explicite. NB : ∇ est le gradient dans les variables x, y.

Pour $u_0, v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, on appelle corrélation de u_0, v_0 les fonctions

$$C^\pm_{(u_0,v_0)}(t) := \int_{\mathbb{R}^2} u_\pm(t,x,y) v_0(x,y)\,dxdy,$$

où $u_\pm$ est la solution de (4), respectivement pour le champ de vecteur $b_\pm$.

5. Montrer que $C^+_{(u_0,v_0)}(t)$ est une fonction périodique dont on donnera la période.
6. Montrer que pour tous $u_0, v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $C^-_{(u_0,v_0)}(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ à une vitesse que l'on précisera.
7. Montrer que si $\partial_x^j u_0(0,y) = 0$ pour tout $j \leq k$ et tout $y \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante $K > 0$ telle que $|C^-_{(u_0,v_0)}(t)| \leq K e^{-(k+2)t}$ lorsque $t \to +\infty$.
8. Montrer que pour tous $u_0, v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$C^-_{(u_0,v_0)}(t) = \sum_{k,n\in\mathbb{N}, k+n\leq N} \alpha(n,k) e^{-(k+n+1)t} + O(e^{-(N+2)t}), \qquad \text{lorsque } t \to +\infty$$

avec $\alpha(k,n)$ des coefficients à déterminer.

Correction 3. 1. Non car ils ne sont pas bornés.

2. Il s'agit par exemple d'une conséquence directe du théorème de Cauchy-Lipschitz. Le caractère global en temps vient de ce que $b_\pm$ est linéaire.
3. Pour b_+, on a $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ soit $\ddot{x} = -x$ et donc la solution est le couple

$$x(t) = \cos(t)x_0 + \sin(t)y_0, \quad y(t) = -\sin(t)x_0 + \cos(t)y_0.$$

Autrement dit,

$$\Phi_t^+(x,y) = \big(\cos(t)x + \sin(t)y, -\sin(t)x + \cos(t)y\big).$$

Pour b_-, on a directement $(x(t),y(t)) = (e^t x_0, e^{-t} y_0)$, soit

$$\Phi_t^-(x,y) = \big(e^t x, e^{-t} y\big).$$

4. Pour l'existence et la formule, il suffit de vérifier que $u(t,x,y) = u_0 \circ \Phi^{\pm}_{-t}(x,y)$ est solution. Pour l'unicité, comme dans le cours : si u est solution $u \circ \Phi^{\pm}_t$ vérifie $\partial_t(u \circ \Phi^{\pm}_t) = 0$ et donc $u \circ \Phi^{\pm}_t = u_0$. Dans le deuxième cas en particulier on obtient $u(t,x,y) = u_0 \circ \Phi^{-}_{-t}(x,y) = u_0(e^{-t}x, e^t y)$.

5. On remarque que Φ^+_t est 2π–périodique et que $C^+_{(u_0,v_0)}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} u_0 \circ \Phi^+_{-t}(z) v_0(z) dz$ est donc aussi 2π–périodique.

6. On écrit

$$\begin{aligned} C^{\pm}_{(u_0,v_0)}(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} u_-(t,x,y) v_0(x,y) dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} u_0(e^{-t}x, e^t y) v_0(x,y) dxdy \\ &= e^{-t} \int_{\mathbb{R}^2} u_0(e^{-t}x, y') v_0(x, e^{-t}y') dxdy' \end{aligned}$$

qui vérifie

$$|C^{\pm}_{(u_0,v_0)}(t)| \leq e^{-t} |\operatorname{supp}(u_0)| |\operatorname{supp}(v_0)| \|u_0\|_{L^\infty} \|v_0\|_{L^\infty}.$$

7. On a alors par Taylor reste integral $u_0(x,y) = x^{k+1}\psi(x,y)$ avec $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et on obtient dans la formule précédente

$$C^{\pm}_{(u_0,v_0)}(t) = e^{-t} \int_{\mathbb{R}^2} u_0(e^{-t}x, y') v_0(x, e^{-t}y') dxdy' = e^{-t} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{-t}x)^{k+1} \psi(e^{-t}x, y') v_0(x, e^{-t}y') dxdy'$$

d'où

$$|C^{\pm}_{(u_0,v_0)}(t)| \leq e^{-(k+2)t} |\operatorname{supp}(u_0)| |\operatorname{supp}(v_0)| \|x^{k+1}\psi\|_{L^\infty} \|v_0\|_{L^\infty}.$$

8. En utilisant une formule de Taylor reste integral, on obtient $u_0(x,y) = \sum_{k=0}^{K} \frac{x^k}{k!} \partial_x^k u_0(0,y) + x^{K+1}\psi(x,y)$ avec $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^2)$. Faisant de même avec v_0 (mais par rapport à la variable y), on obtient finalement le résultat avec

$$\alpha(n,k) = \frac{1}{k!n!} \left(\int_{\mathbb{R}} x^k \partial_y^n v_0(x,0) dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} y^n \partial_x^k u_0(0,y) dx \right).$$