

Mécanique des Fluides

Yann BERTHO

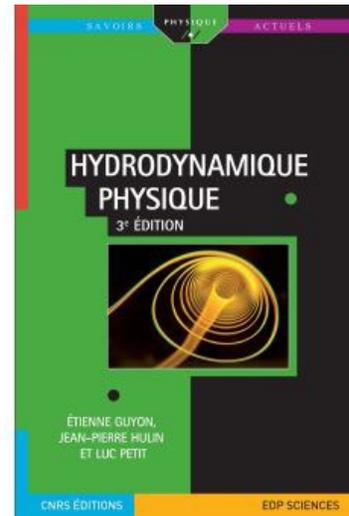
Plan du cours

- **Introduction**
- **Hydrostatique**
pression, loi de Pascal, poussée d'Archimède
- **Cinématique des fluides**
descriptions Lagrangienne et Eulérienne, lignes d'écoulement, débit, vorticité
- **Équations de bilan**
équation de continuité, PFD
- **Fluides parfaits**
équation d'Euler, théorème de Bernoulli
- **Fluides visqueux**
tenseur des contraintes, équation de Navier-Stokes, écoulements de Couette et de Poiseuille
- **Fluides non-Newtoniens**

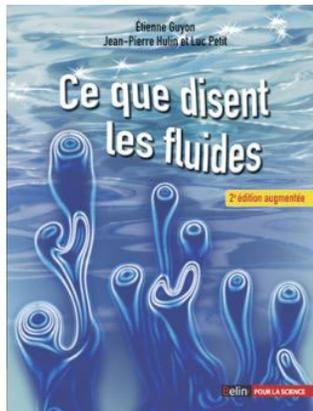


Viscous droplet umbrella
A. Kiyama, R. Rabbi and T. Truscott

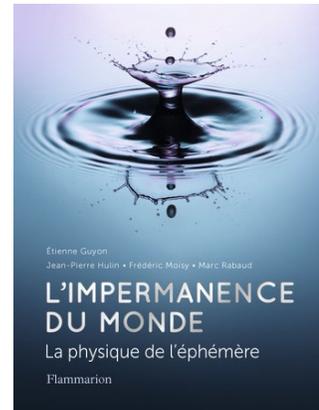
Bibliographie



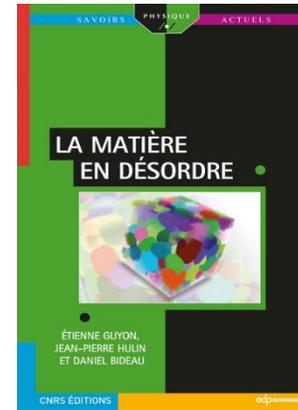
Hydrodynamique physique
É. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit



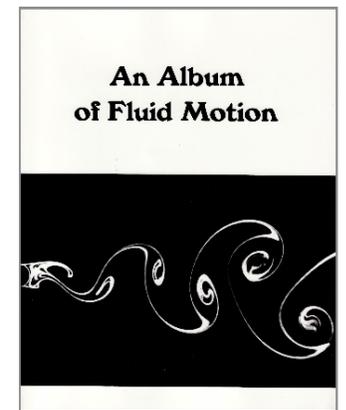
Ce que disent les fluides
É. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit



L'impermanence du monde
É. Guyon, J.P. Hulin, F. Moisy, M. Rabaud



La matière en désordre
É. Guyon, J.P. Hulin, D. Bideau



An album of fluid motion
H. Van Dyke

I. Introduction

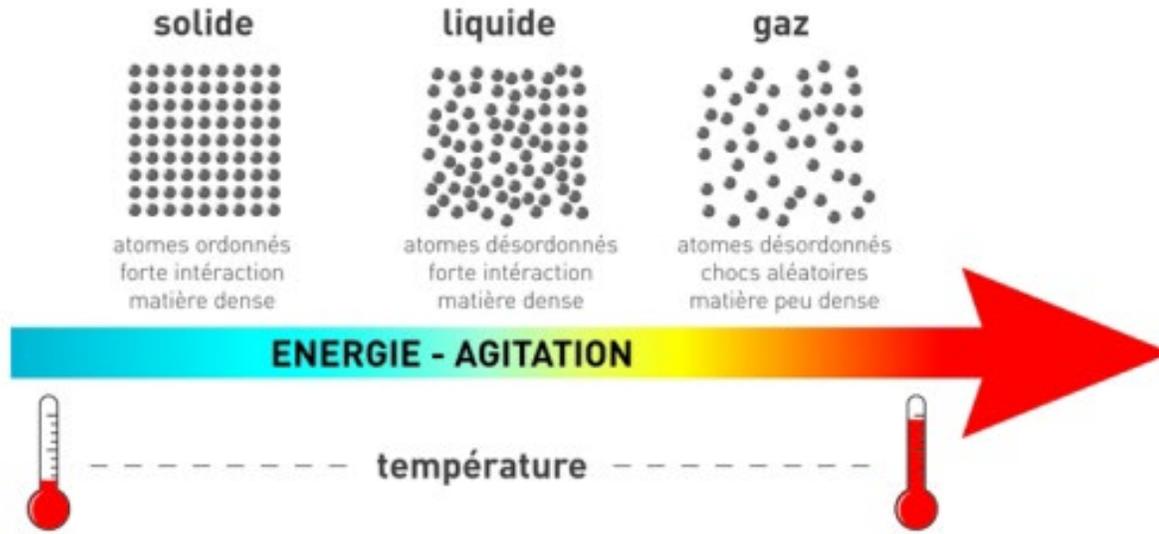
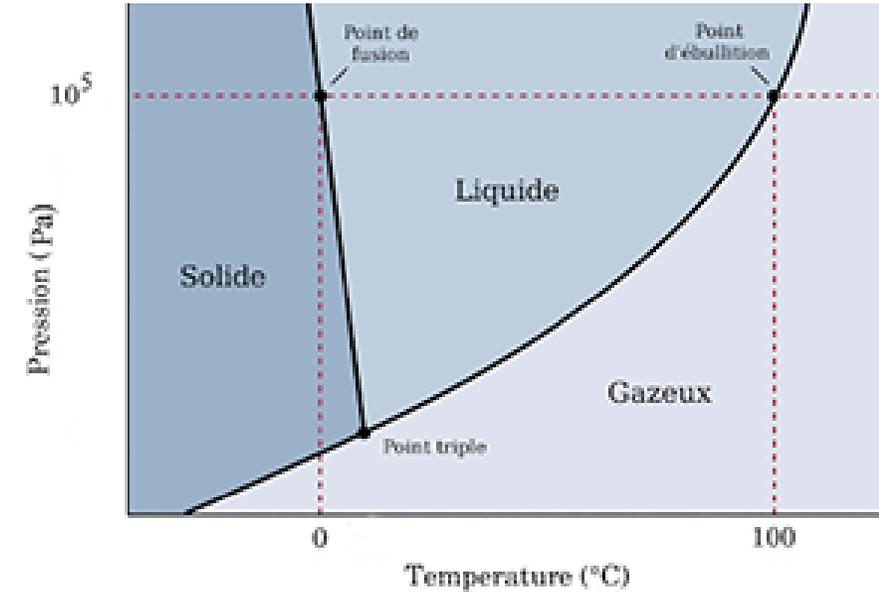


diagramme de phase de l'eau



Qu'est-ce qu'un fluide ?

fluide = corps à l'état **gazeux** ou à l'état **liquide**.

caractéristiques : un fluide n'a pas de forme propre (état désordonné).

un liquide a une surface libre / un gaz occupe tout le volume qui s'offre à lui.

À quelle échelle décrit-on la mécanique des fluides ?

microscopique

échelle des molécules
libre parcours moyen λ
vitesse gouvernée par T
(mouvement Brownien)



Robert Brown
[1773-1858] 

«

mésoscopique

particule fluide

notion de moyenne spatiale
significative et peu fluctuante

→ Approche « milieu continu »

«

macroscopique

échelle de l'écoulement L
échelle de variation des champs
scalaires ou vectoriels ($p, T, \rho, \vec{v} \dots$)

Quelques exemples

Grande variété d'échelles, de viscosités,
de matériaux.



Tâche rouge de Jupiter



Tourbillon cyclonique



Tourbillon de sillage



Coulée de lave



Méandres



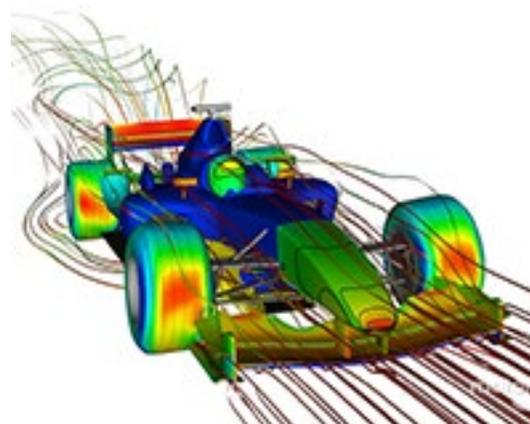
Dunes de sable



Vagues



Enroulement d'un filet de miel



Aérodynamisme automobile



Montgolfière



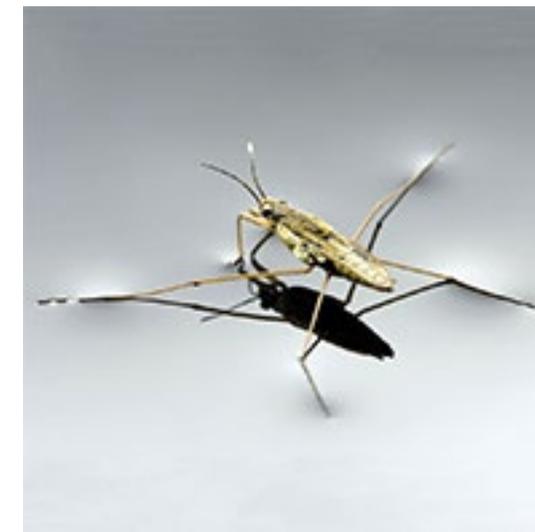
Lézard des sables



Mousse liquide

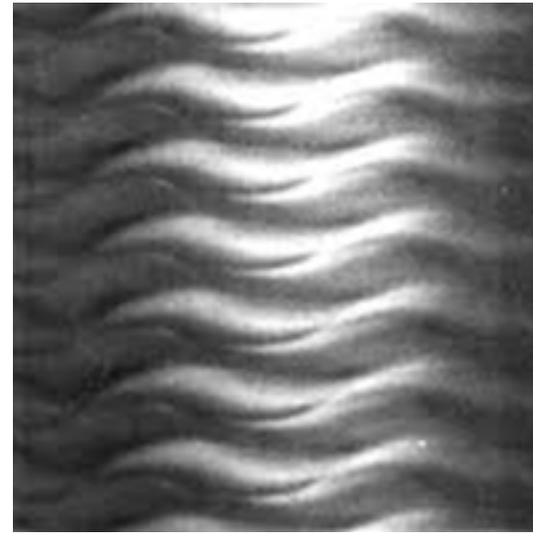


Gouttes

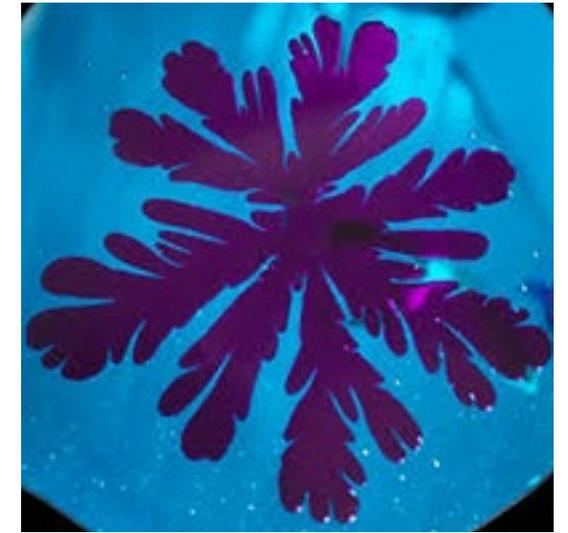


Gerris marchant sur l'eau

Apparition d'une structuration, de motifs
(instabilités hydrodynamiques)



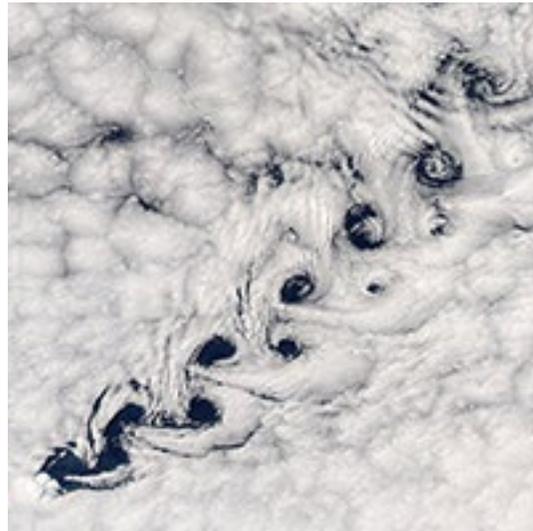
Taylor-Couette



Saffman-Taylor



Rayleigh-Plateau



Von Karman



Kelvin-Helmholtz



Rayleigh-Benard

II. Hydrostatique

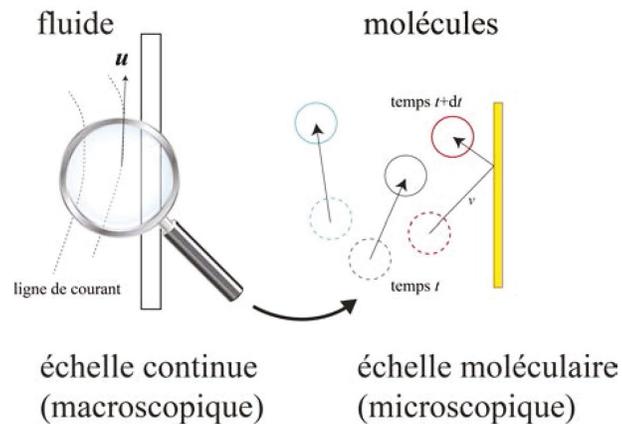
L'hydrostatique traite des cas où le fluide est immobile $\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

Notion de pression

Soit un volume élémentaire de fluide à l'équilibre hydrostatique.

Le fluide, au repos à l'échelle macroscopique, est composé de molécules animées d'une vitesse aléatoire.

La seule contrainte existant sur la surface du volume élémentaire est la **pression**, dont l'origine est l'impulsion transmise par les collisions des molécules de fluide.



$$\vec{dF} = -p \vec{dS} \quad \text{où la surface est orientée vers l'extérieur du volume considéré}$$

propriété : isotrope

unité : Pa (N/m²)

Autres unités :

1 atm = 1 013,25 hPa

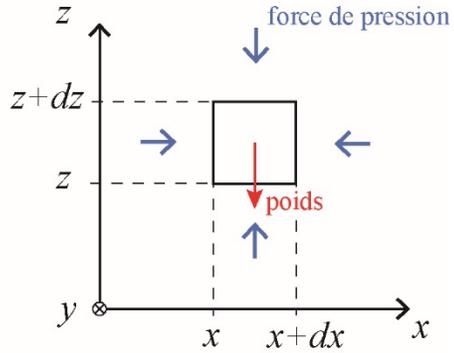
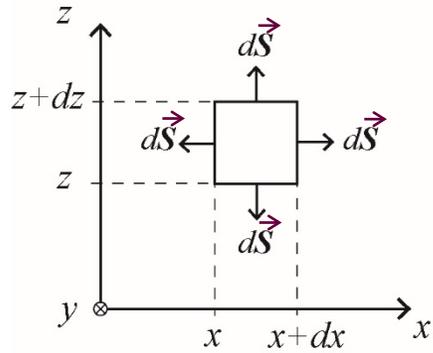
1 PSI = 45,965 Pa

; 1 bar = 10⁵ Pa

; 1 Torr = 1/760 atm

Loi de Pascal

On considère une particule fluide cubique :



Résultante des forces suivant x (pression) :

$$[p(x) - p(x + dx)] dy dz = 0$$

$$\text{c'est à dire : } -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0 \quad \text{soit : } \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Résultante des forces suivant z (pression et gravité) :

$$[p(z) - p(z + dz)] dx dy - \rho g dx dy dz = 0$$

$$\text{c'est à dire : } -\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right) dx dy dz = 0 \quad \text{soit : } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \quad (\overrightarrow{\text{grad}} p = \rho \vec{g})$$

Conditions limites :

- La pression peut être imposée aux extrémités du système par l'expérimentateur
- Pour une interface liquide/gaz ou entre 2 liquides non miscibles, il y a égalité de la pression de part et d'autre de l'interface : $p_1 = p_2$



Blaise Pascal
[1623-1662] 

Poussée d'Archimède

« Tout corps immergé dans un fluide au repos est soumis, de la part de celui-ci, à une poussée verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du volume de fluide déplacé. »



Archimède 
[-287 – -212]

Démonstration :

La force qu'un fluide exerce sur un élément de fluide de volume V délimité par la surface S est :

$$\vec{F} = - \oiint p d\vec{S}$$

↖ Green-Ostrogradski

$$\vec{F} = - \iiint \vec{\nabla} p dV$$

↙

Si le fluide est au repos (équilibre hydrostatique) dans le champ de pesanteur, la loi de Pascal conduit à :

$$\vec{F} = - \iiint \rho \vec{g} dV$$

Donc la résultante des forces de pression F qui s'exercent sur la surface S délimitant le volume V est égale au poids propre du volume de fluide.

III. Cinématique des fluides

Descriptions Lagrangienne et Eulérienne

- Mécanique du point : point de vue Lagrangien $\rightarrow \vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t), \dots$
- Mécanique des fluides : point de vue Eulérien $\rightarrow \vec{v}(\vec{r}, t), \vec{a}(\vec{r}, t), p(\vec{r}, t), \dots$
Notion de **champ**



Joseph-Louis Lagrange
[1736-1813] 

Par exemple, la vitesse du fluide (le champ de vitesse) dépend du temps mais aussi de l'espace :

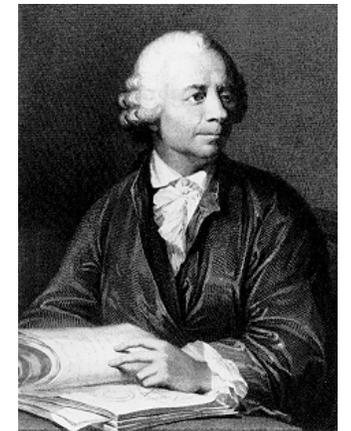
$$\vec{v}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z, t) \\ v_y(x, y, z, t) \\ v_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

Un fluide peut être décrit par la donnée de 3 champs :

- 1 champ vectoriel : $\vec{v}(\vec{r}, t)$
- 2 champs scalaires décrivant les variables thermodynamiques : $p(\vec{r}, t), \rho(\vec{r}, t)$



Comment définir l'accélération qui est une notion purement Lagrangienne dans le Principe Fondamental de la Dynamique de Newton ?



Leonhard Euler
[1707-1783] 

Dérivées Lagrangienne et Eulérienne

- Exemple d'un champ scalaire : la température $T(\vec{r}, t)$

On considère le champ de température $T(\vec{r}, t)$.

Une petite variation de température est donnée par la différentielle : $dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$

Cette variation de température par unité de temps s'écrit : $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}$

Soit : $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})T$

- Exemple d'un champ vectoriel : la vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$

De la même façon : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \rightarrow$ c'est l'accélération !

On définit la **dérivée particulaire** (ou dérivée totale) :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

$$\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \right)$$

Trajectoire, ligne de courant, ligne d'émission

- Trajectoire (pathline)

Chemin suivi par une particule fluide au cours du temps, *i.e.* ensemble des positions successives de cette particule durant son mouvement (suivi lagrangien). La tangente à la trajectoire est parallèle au vecteur vitesse qu'avait la particule à l'instant où elle passait en ce point.

- Ligne de courant (streamline)

Ligne $d\vec{r}$ tangente en tout point au vecteur vitesse \vec{v} , à un instant donné. Ce sont les lignes de champ du vecteur vitesse à cet instant (description eulérienne).

$$\boxed{d\vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{0}} \text{ soit } \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$$

- Ligne d'émission (streakline)

Ligne formée par la position successive de points émis d'une source fixe (injection continue d'un colorant ou de fumée).



Dans un écoulement stationnaire :
trajectoire = ligne de courant = ligne d'émission

- Techniques de visualisation

- injection de colorant
- émission de fumée

➔ si l'injection ou l'émission est continue, on visualise les **lignes d'émission**

- ensemencement par particules sphériques
- émission de bulles

➔ photo avec temps de pose court : **lignes de courant**

➔ photo avec temps de pose long : **trajectoires** particulières et **lignes d'émission**

- ensemencement par particules anisotropes (paillettes réfléchissantes : Kalliroscope, Iriodin)

➔ visualisation de la **structure** de l'écoulement

- Techniques de mesure de vitesse

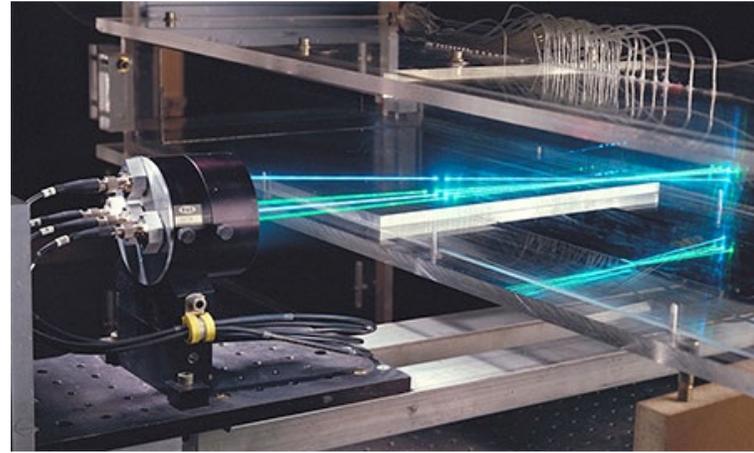
- anémométrie

- ➔ à hélices, à coupelles

- ➔ à fil chaud

- ➔ laser Doppler (LDA)

- ➔ Doppler ultrasonore

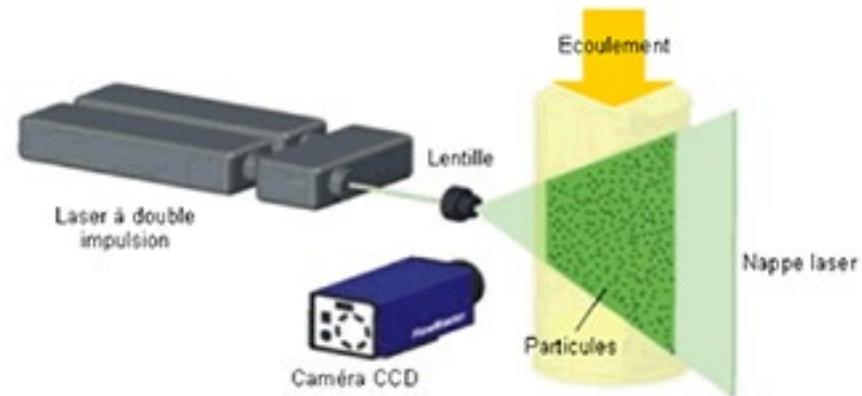


- tube de Pitot



- vélocimétrie par suivi de particules (PTV)

- vélocimétrie par images de particules (PIV)



Débit

Débit volumique : $Q_V = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$ (m³ s⁻¹)

Débit massique : $Q_m = \iint \rho (\vec{v} \cdot d\vec{S})$ (kg s⁻¹)

Remarque : vitesse moyenne (ou vitesse débitante) : $\bar{v} = \frac{Q_V}{S} = \frac{Q_m}{\rho S}$

Vorticité

La vorticité $\vec{\omega}(\vec{r}, t)$ est définie comme le rotationnel de la vitesse : $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ ($\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$)
Unité : s⁻¹

La vorticité décrit la rotation locale des particules fluides.

Remarque : écoulement irrotationnel $\Leftrightarrow \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ (écoulement non tourbillonnaire et champ de vitesse dérivant d'un potentiel)

IV. Équations de bilans

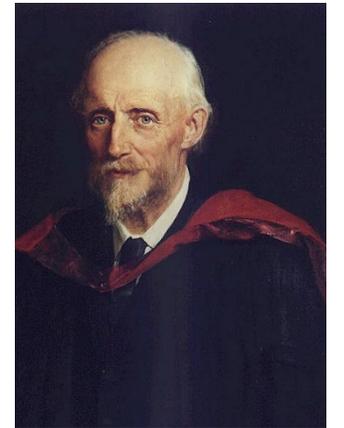
On s'intéresse au transport d'une quantité physique F dans un volume de contrôle (VC) matériel donné, délimité par une surface de contrôle (SC). On notera $\vec{U}(\vec{r}, t)$ la vitesse de déplacement de la surface de contrôle.

Transport d'une quantité scalaire F

$$\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} f(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, t) d\tau + \oiint_{SC} f(\vec{r}, t) \vec{U} \cdot d\vec{S}$$

Transport d'une quantité vectorielle \vec{F}

$$\frac{d}{dt} \vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \vec{f}(\vec{r}, t) d\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial}{\partial t} \vec{f}(\vec{r}, t) d\tau + \oiint_{SC} \vec{f}(\vec{r}, t) (\vec{U} \cdot d\vec{S})$$



Osborne Reynolds
[1842-1912] 

Le **théorème de transport de Reynolds** permet d'aboutir à l'équation de conservation de la masse et au principe fondamental de la dynamique pour un fluide.

Démonstration : cas 1D

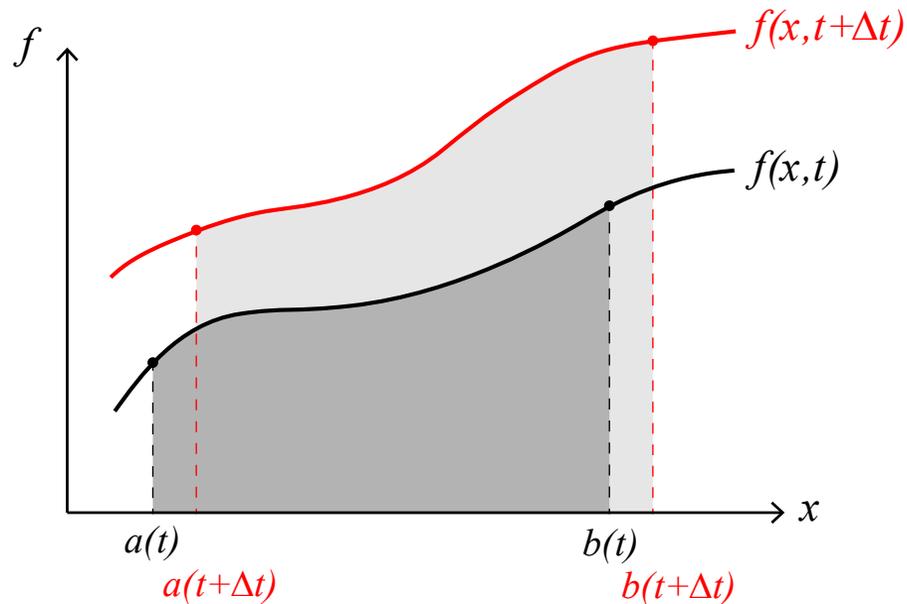
$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx \right) / \Delta t$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{a+\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t}^{b+\frac{\partial b}{\partial t} \Delta t} \left(f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right) dx - \int_a^b f(x, t) dx \right) / \Delta t$$

développement
de Taylor



Gottfried Wilhelm Leibniz
[1646-1716] 



$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \frac{\text{Area under } f(x, t+\Delta t) \text{ from } a(t+\Delta t) \text{ to } b(t+\Delta t) - \text{Area under } f(x, t) \text{ from } a(t) \text{ to } b(t)}{\Delta t}$$

Démonstration : cas 1D

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x, t + \Delta t) dx - \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx \right) / \Delta t$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{a+\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t}^{b+\frac{\partial b}{\partial t} \Delta t} \left(f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right) dx - \int_a^b f(x, t) dx \right) / \Delta t$$

développement
de Taylor

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_a^b \left(f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right) dx - \int_a^{a+\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t} \left(f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right) dx + \int_b^{b+\frac{\partial b}{\partial t} \Delta t} \left(f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \right) dx - \int_a^b f dx \right) / \Delta t$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_a^b f dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t dx - \int_a^{a+\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t} f dx - \int_a^{a+\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t} \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t dx + \int_b^{b+\frac{\partial b}{\partial t} \Delta t} f dx + \int_b^{b+\frac{\partial b}{\partial t} \Delta t} \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t dx - \int_a^b f dx \right) / \Delta t$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx - \frac{\int_a^{a+\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t} f dx}{\Delta t} - \int_a^{a+\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \frac{\int_b^{b+\frac{\partial b}{\partial t} \Delta t} f dx}{\Delta t} + \int_b^{b+\frac{\partial b}{\partial t} \Delta t} \frac{\partial f}{\partial t} dx \right)$$

le domaine d'intégration
tend vers 0



Gottfried Wilhelm Leibniz
[1646-1716] 

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx - \frac{\int_a^{a+\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t} f dx}{\Delta t} + \frac{\int_b^{b+\frac{\partial b}{\partial t} \Delta t} f dx}{\Delta t} \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx - \frac{f(a,t) \int_a^{a+\frac{\partial a}{\partial t} \Delta t} dx}{\Delta t} + \frac{f(b,t) \int_b^{b+\frac{\partial b}{\partial t} \Delta t} dx}{\Delta t} \right)$$

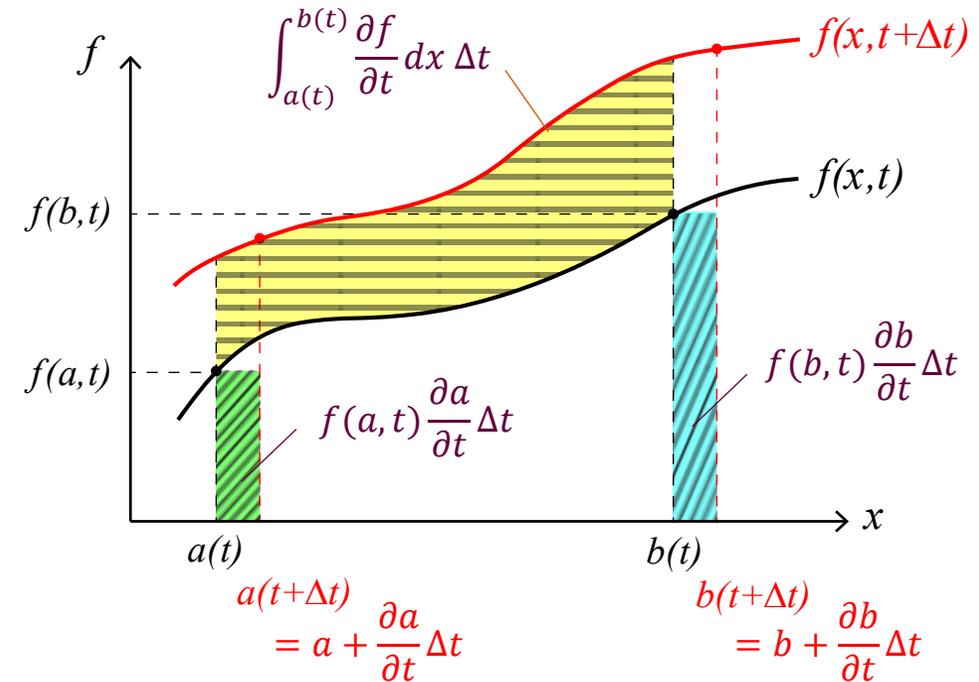
$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx - \frac{f(a,t) \frac{\partial a}{\partial t} \Delta t}{\Delta t} + \frac{f(b,t) \frac{\partial b}{\partial t} \Delta t}{\Delta t} \right)$$



$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx - f(a,t) \frac{\partial a}{\partial t} + f(b,t) \frac{\partial b}{\partial t}$$

vitesse de déplacement des bords du domaine
(analogue de \vec{U} du théorème de transport)

sur un domaine tendant vers 0, f est quasiment constante, soit $f \sim f(a,t)$ et $f \sim f(b,t)$ respectivement.



Conservation de la masse

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho d\tau = \dots = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{Équation de continuité}$$

Le long de sa trajectoire, une particule fluide voit sa densité augmenter ou diminuer à un taux $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ donné par $-\operatorname{div} \vec{v}$. Ainsi, si $\operatorname{div} \vec{v} > 0$ (écoulement de dilatation), alors $\frac{d\rho}{dt} < 0$ (la densité diminue).

Un fluide incompressible conserve son volume au cours du temps, et donc sa masse volumique ($\frac{d\rho}{dt} = 0$), soit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{Condition d'incompressibilité} \quad (\operatorname{div} \vec{v} = 0)$$

- Quand peut-on considérer un fluide comme incompressible ?

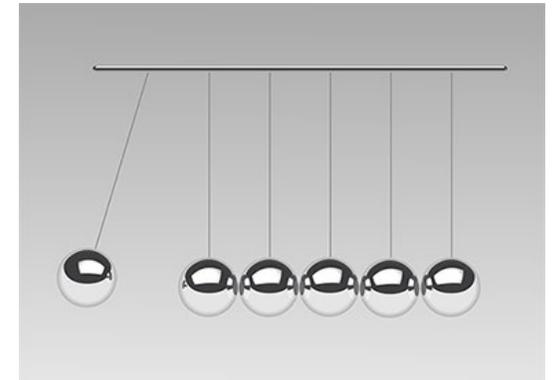
fluide incompressible \Leftrightarrow vitesse caractéristique de l'écoulement $V \ll$ vitesse du son c dans le fluide

Nombre de Mach :

$$\mathbf{Ma} = \frac{V}{c}$$

$Ma \ll 1$ écoulement subsonique

$Ma \gg 1$ écoulement supersonique



Exemples :

- Pour l'eau : $c \sim 1500$ m/s. L'hypothèse d'incompressibilité est toujours satisfaite en pratique.
- Pour l'air : $c \sim 340$ m/s. Des effets de compressibilité sont attendus dans les écoulements appliqués à l'aéronautique.

Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \vec{v} d\tau = \dots = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\iiint_{VC} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Principe fondamental de la dynamique pour un fluide



Ce résultat est remarquablement simple et a été obtenu sans l'hypothèse d'incompressibilité $\rho \equiv \rho(\vec{r}, t)$.

V. Fluides parfaits

Un fluide est dit « parfait » lorsque sa viscosité η peut-être considérée comme nulle.

La viscosité est la seule source de dissipation d'énergie pour un fluide donc :

fluide parfait \Leftrightarrow conservation de l'énergie mécanique

Remarque : un fluide parfait n'oppose pas de résistance au déplacement d'un objet.

Équation d'Euler

On a vu que le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit
$$\iiint_{VC} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Les forces extérieures sont :

- le poids : $\iiint_{VC} \rho \vec{g} d\tau$

- les forces de pression : $\oint_{SC} -p d\vec{S}$

On en déduit que

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$

Équation d'Euler



Leonhard Euler
[1707-1783] 

Équation de Bernoulli

Hypothèses : - écoulement stationnaire ($\partial/\partial t = 0$)

- fluide parfait ($\eta = 0$)

- écoulement incompressible ($\rho = C^{te}$)

L'intégration de l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant conduit à

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho g z = C^{te} \text{ le long d'une ligne de courant}$$

pression
dynamique

pression
statique

pression
hydrostatique

(cette quantité est appelée la **charge**)

Cette équation traduit la **conservation de l'énergie** par unité de volume

$$E_{\text{cinétique}} + E_{\text{interne}} + E_{\text{potentielle}} = E_{\text{totale}}$$



Daniel Bernoulli
[1700-1782] 

- Écoulement irrotationnel:

Dans un écoulement irrotationnel ($\vec{\omega} = \vec{0}$), la charge est la même dans tout le fluide.

- Présence de machine:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g z_1 + \frac{\mathcal{P}}{Q_v} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g z_2$$

où $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} : \text{puissance (W)} \\ Q_v : \text{débit volumique (m}^3 \text{ s}^{-1}\text{)} \end{array} \right.$

$\mathcal{P} > 0$ si la puissance est reçue par le fluide (pompe)

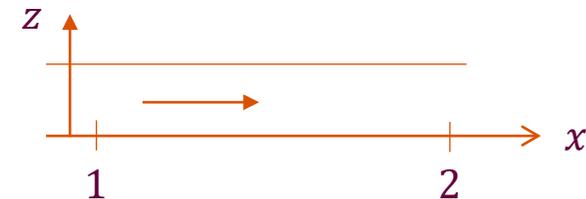
$\mathcal{P} < 0$ si la puissance est perdue par le fluide (turbine)

- Perte de charge:

S'il y a dissipation d'énergie (viscosité), l'écoulement dans une conduite horizontale voit la pression du fluide diminuer au cours de la propagation (au lieu de rester constante).

Cette diminution de pression est appelée **perte de charge Δp** .

$$\text{Alors : } \frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p$$

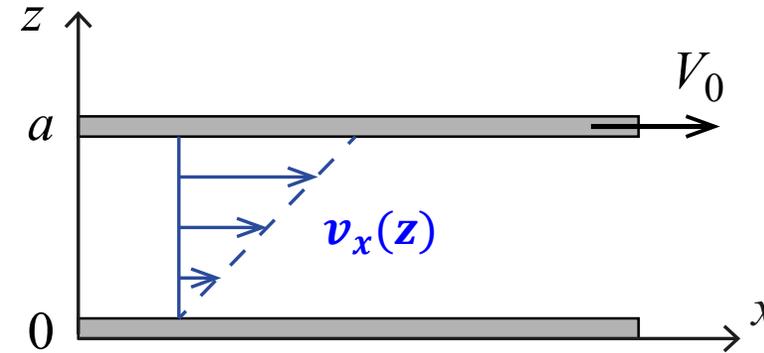


V. Fluides visqueux

La viscosité

- Manifestation macroscopique

→ Écoulement de Couette plan



Maurice Couette
[1858-1943] 

En régime stationnaire, on observe un profil de vitesse linéaire donné par

$$v_x(z) = V_0 \frac{z}{a}$$

Newton montre que, pour une plaque de surface S , la force de friction \vec{F} est proportionnelle au gradient de vitesse entre les plaques (on parle de **fluide Newtonien**)

$$\boxed{\frac{F_x}{S} = \eta \frac{V_0}{a}}$$

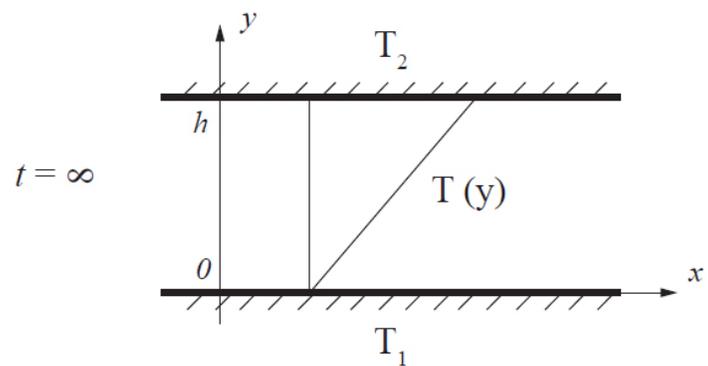
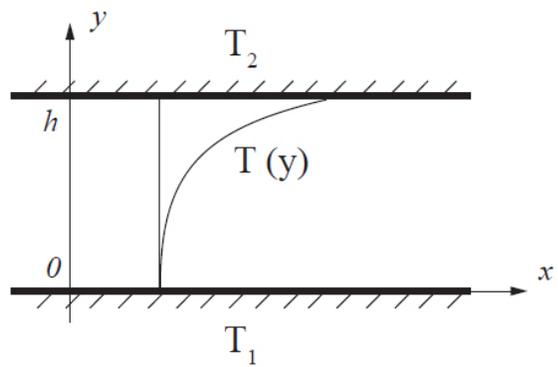
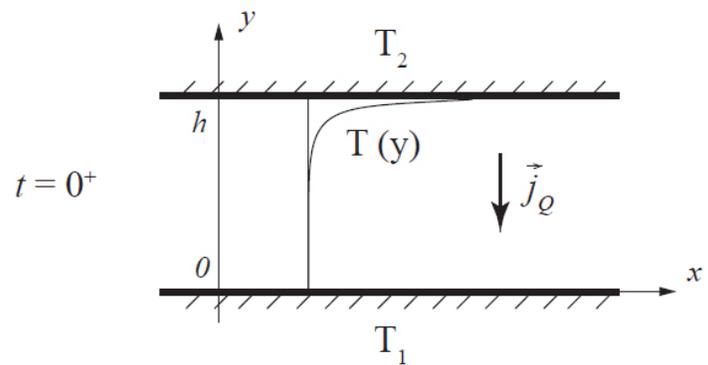
$\frac{F_x}{S}$: contrainte visqueuse (contrainte de cisaillement)
 η : viscosité dynamique (Pa s)

- Origine physique

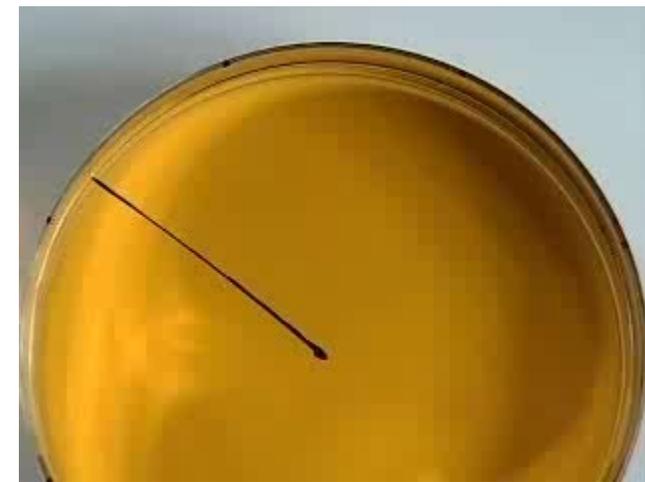
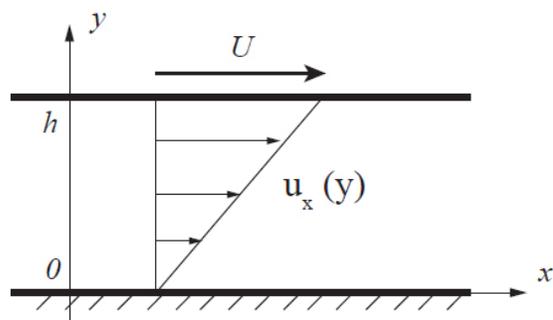
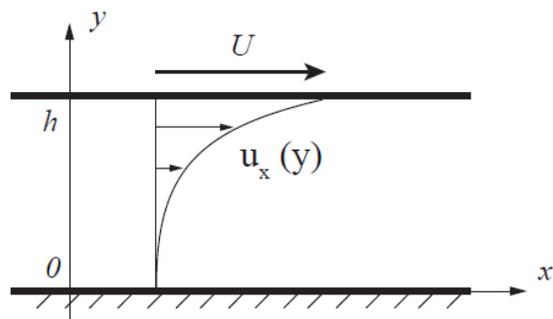
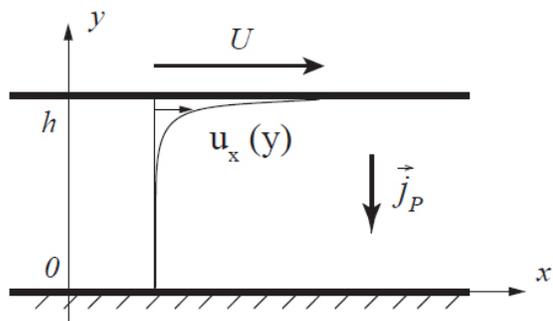
La viscosité assure le transfert diffusif de la quantité de mouvement d'une couche de fluide à la suivante.

La viscosité est la manifestation macroscopique des collisions entre particules à l'échelle moléculaire.

Diffusion de chaleur



Diffusion de quantité de mouvement



Nombre de Reynolds

Nombre sans dimension qui compare les effets inertiels aux effets visqueux

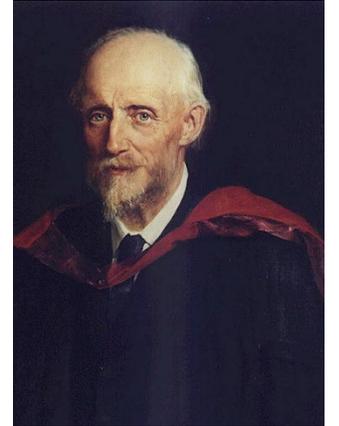
$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\eta}$$

ρ : masse volumique (kg m^{-3})

V : échelle de vitesse (m s^{-1})

L : échelle de longueur (m)

η : viscosité dynamique (Pa s)



Osborne Reynolds
[1842-1912] 

Il permet de caractériser le régime d'écoulement :

- Si $\text{Re} \ll 1$, les effets inertiels sont négligeables devant les effets visqueux.
(écoulement laminaire)
- Si $\text{Re} \gg 1$, les effets visqueux sont négligeables devant les effets inertiels.
(écoulement turbulent)

Tenseur des contraintes

Une contrainte généralise la notion de pression vue précédemment (unité: Pa ou N m⁻²).

$$d\vec{F} = \bar{\bar{\sigma}} d\vec{S}$$

$\bar{\bar{\sigma}}$: tenseur des contraintes

$d\vec{S}$: élément de surface orienté vers l'extérieur

$$dF_i = \sigma_{ij} dS_j$$

notation tensorielle

(convention de sommation d'Einstein)

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

tenseur de rang 2, symétrique ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)

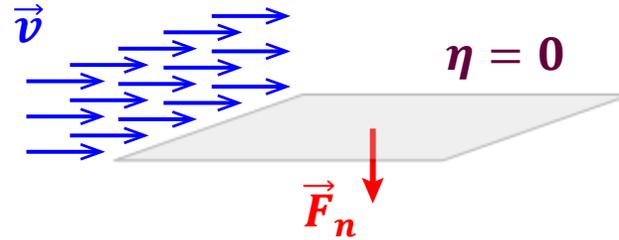
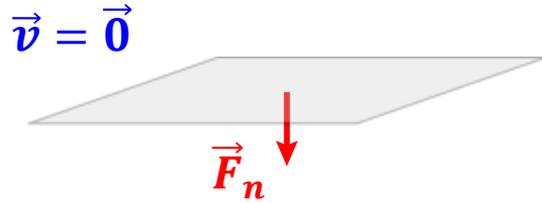
Il existe 2 types de contraintes : contraintes **normales**, contraintes **tangentielles**.

- Hydrostatique ou fluide parfait

La seule contrainte est normale : $d\vec{F} = -p d\vec{S}$

Donc : $\vec{\sigma} = -p \vec{I}$ ou $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$

δ_{ij} : symbole de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$



- Fluide visqueux

En présence de viscosité, il existe des contributions supplémentaires, à la fois normales (comme la pression) mais aussi tangentielles. On note alors

$$\vec{\sigma} = -p \vec{I} + \vec{\sigma}'$$

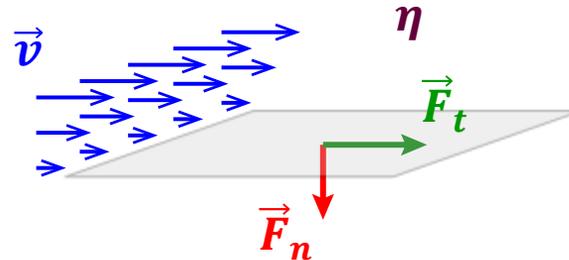
ou

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

où σ'_{ij} est le **tenseur des contraintes visqueuses**.

Pour un **fluide Newtonien incompressible**, le tenseur des contraintes visqueuses s'exprime en fonction des gradients de vitesse

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$



- Tenseur $\bar{\bar{G}}$ des taux de déformation (ou des gradients de vitesse)

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Décomposition :

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= e_{ij} + \omega_{ij} \end{aligned}$$

e_{ij} : tenseur des déformations pures (symétrique)

correspond à une déformation pure du fluide (élongation, contraction)

Propriétés : - $\text{tr}[\bar{e}] = e_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{v}$

- la direction des déformations subies par le fluide est donnée par les vecteurs propres de \bar{e} ,
et les valeurs propres λ renseignent sur le type de déformation ($\lambda > 0$ élongation ; $\lambda < 0$ contraction)

ω_{ij} : tenseur des rotations pures (antisymétrique)

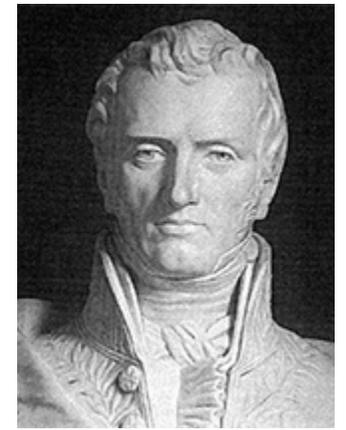
correspond à une rotation pure du fluide

Équation de Navier-Stokes

Pour un fluide visqueux, le principe fondamental de la dynamique s'écrit donc

$$\iiint_{VC} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\iiint_{VC} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d\tau + \oiint_{SC} \vec{\sigma} d\vec{S}$$



Claude Louis Marie
Henri Navier
[1785-1836] 

On en déduit que

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$$

Équation de Navier-Stokes

terme
instationnaire

terme
d'advection
(non-linéaire)

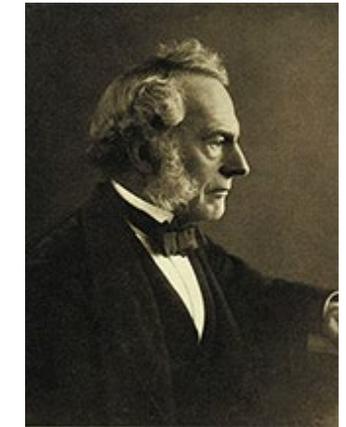
terme
gradient
de pression

terme de
gravité

terme
de contraintes
visqueuses

Remarques :

- ✓ Pour un fluide parfait ($\eta = 0$), on retrouve l'équation d'Euler.
- ✓ Pour un fluide immobile (hydrostatique $\vec{v} = 0$), on retrouve la loi de Pascal.



George Gabriel Stokes
[1819-1903] 

On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées cartésiennes $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$



✗ *Yang-Mills and Mass Gap*

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

✗ *Riemann Hypothesis*

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part $\frac{1}{2}$.

✗ *P vs NP Problem*

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

✗ *Navier-Stokes Equation*

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

✗ *Hodge Conjecture*

The answer to this conjecture determines how much of the topology of the solution set of a system of algebraic equations can be defined in terms of further algebraic equations. The Hodge conjecture is known in certain special cases, e.g., when the solution set has dimension less than four. But in dimension four it is unknown.

✓ *Poincaré Conjecture*

In 1904 the French mathematician Henri Poincaré asked if the three dimensional sphere is characterized as the unique simply connected three manifold. This question, the Poincaré conjecture, was a special case of Thurston's geometrization conjecture. Perelman's proof tells us that every three manifold is built from a set of standard pieces, each with one of eight well-understood geometries.

✗ *Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture*

Supported by much experimental evidence, this conjecture relates the number of points on an elliptic curve mod p to the rank of the group of rational points. Elliptic curves, defined by cubic equations in two variables, are fundamental mathematical objects that arise in many areas: Wiles' proof of the Fermat Conjecture, factorization of numbers into primes, and cryptography, to name three.

- Conditions aux limites cinématiques

Pour un fluide visqueux, il y a **non-glissement à la paroi** (condition d'adhérence) qui impose une égalité de la vitesse de la paroi \vec{U}_{paroi} et celle du fluide \vec{v} .

$$\vec{v} = \vec{U}_{\text{paroi}}$$

Remarque :

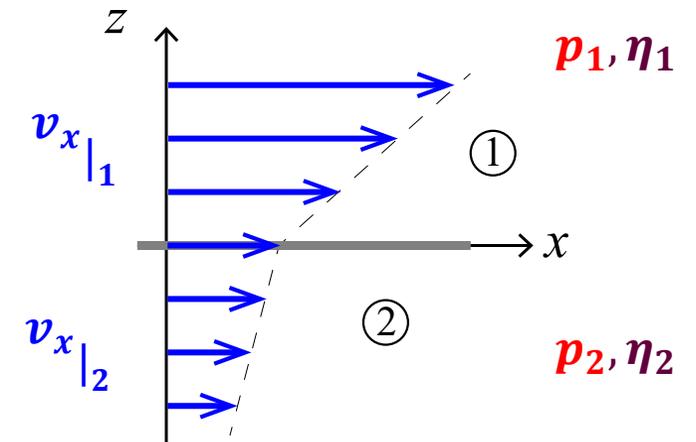
Pour un fluide parfait, il n'y a pas de frottement et la vitesse ne s'annule pas nécessairement au contact d'une paroi. La composante de la vitesse tangente à la paroi peut être quelconque (glissement). En revanche, la composante normale est nécessairement égale à celle de la paroi.

Alors $\vec{v} \cdot \hat{n} = \vec{U}_{\text{paroi}} \cdot \hat{n}$

- Conditions aux limites dynamiques

Pour un fluide visqueux, il y a continuité des contraintes, normales et tangentielles, de part et d'autre de l'interface.

$$\begin{aligned} \eta_1 \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_1 &= \eta_2 \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_2 \\ \eta_1 \frac{\partial v_y}{\partial z} \Big|_1 &= \eta_2 \frac{\partial v_y}{\partial z} \Big|_2 \\ p_1 &= p_2 \end{aligned}$$



- Écoulements visqueux ($\text{Re} \ll 1$)

Les écoulements à très faibles nombres de Reynolds sont gouvernés par l'équation de Navier-Stokes dans laquelle les termes inertiels et instationnaires sont négligeables car petits.

On peut se ramener alors à l'équation :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}p + \eta \Delta \vec{v}$$

Équation de Stokes

(équation linéaire)

Propriétés de l'équation de Stokes :

- ✓ unicité de solution
- ✓ réversibilité hydrodynamique
- ✓ symétrie de l'écoulement autour de corps symétriques

4. Quelques écoulements simples

Dans quelques configurations simples, l'équation de Navier-Stokes peut se résoudre analytiquement. C'est le cas par exemple des **écoulements parallèles unidirectionnels stationnaires et incompressibles**. Dans ce dernier cas l'équation de Navier-Stokes

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \eta \Delta\vec{v}$$

se réduit à

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \eta \Delta\vec{v} \quad (\text{équation linéaire})$$

Pourquoi? Parce qu'outre le terme instationnaire, les termes inertiels sont nuls en raison de la topologie de l'écoulement.

⇒ écoulement unidirectionnel, stationnaire, incompressible, le champ de vitesse se réduit à $\vec{v} = \begin{cases} v_x(x, y, z, t) \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$

Les équations de Navier-Stokes se simplifient alors considérablement :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \eta \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} + \rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$