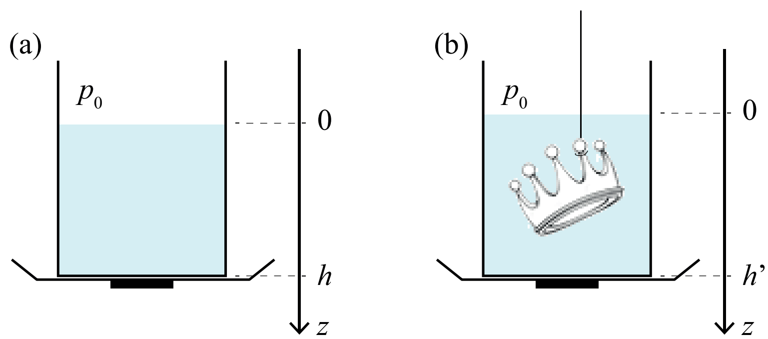
Partiel de Mécanique des fluides

jeudi 26 octobre 2023
(durée : 2 heures – sans document - barème indicatif)

Exercice 1 : La balance hydrostatique (5 points)

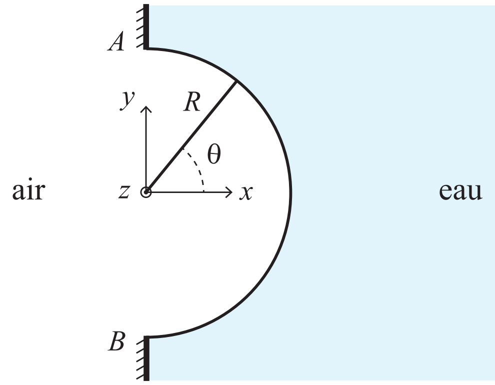
Selon la légende, le roi Hiéron II de Syracuse aurait demandé à son ami Archimède, alors agé de 22 ans, de vérifier si la couronne en or massif qu'il s'était faite confectionner comme offrande à Zeus, était bien totalement en or, ou si l'artisan l'ayant réalisée n'y avait habilement remplacé une partie de l'or par de l'argent. Bien évidemment, la vérification ne devait pas détériorer la couronne. On raconte qu'Archimède trouva la solution alors qu'il était dans son bain et prononça la fameuse phrase "Eurêka !" (*J'ai trouvé !*) pour témoigner de sa découverte ! La procédure qu'il employa est à l'origine des balances hydrostatiques utilisées notamment en joaillerie pour tester la qualité des pierres précieuses.

On considère un récipient cylindrique de rayon $R = 10$ cm posé sur une balance. La tare de la balance est réalisée lorsque le récipient, vide, est posé sur la balance. Le récipient est alors rempli d'eau sur une hauteur h. La surface libre de l'eau en $z = 0$ est à la pression atmosphérique p_0. On note $\rho_e = 10^3$ kg m^{-3} la masse volumique de l'eau, $g = 10$ m s^{-2} l'accélération de la pesanteur et on oriente l'axe z vers le bas (Fig. a).



1. Rappeler la loi de Pascal et déterminer l'expression de la pression p en fonction de la profondeur z.
2. En déduire le poids P mesuré par la balance. Faire l'application numérique dans le cas où le récipient contient 10 L d'eau.
3. La couronne, de masse volumique ρ et de volume $\mathcal{V}$, est immergée dans l'eau en la suspendant par un fil (elle ne repose pas sur le fond). La nouvelle hauteur d'eau est alors notée h' (Fig. b). On négligera le volume du fil.
   (a) Exprimer le volume de la couronne $\mathcal{V}$ en fonction de h et h'.
   (b) Exprimer la nouvelle pression qui s'exerce sur le fond du récipient, en fonction de $\mathcal{V}$ et h. En déduire que le poids résultant mesuré par la balance peut s'écrire
   $$P' = (m_1 + m_2)g. \tag{1}$$
   Identifier m_1 et m_2. En déduire l'excès de masse mesuré par la balance en présence de la couronne dans l'eau si $(h' - h) = 23$ mm.
   (c) En déduire la masse volumique de la couronne ρ si sa masse est de 880 g. La masse volumique de l'or étant $\rho_{Au} = 19,3\ 10^3$ kg m^{-3}, conclure sur la nature de la couronne.

EXERCICE 2 : Barrage voûte (7 points)



On considère un barrage voûte représenté en vue aérienne sur le schéma ci-dessus. Le barrage a une forme de demi-cylindre de rayon R et retient une hauteur d'eau h. L'épaisseur de la paroi sera supposée suffisamment faible devant les dimensions du barrage pour pouvoir être négligée. Le barrage est en appui aux points A et B sur les parois d'une falaise. On notera $\vec{dS}$ un élément de surface élémentaire du demi-cylindre. La pression atmosphérique sera notée p_0, la masse volumique de l'eau ρ et l'accélération de la pesanteur $g \simeq 10$ m s^{-2}. On prendra z orienté vers le haut et $z = 0$ à la surface de l'eau.

1. Rappeler la loi de Pascal et exprimer les pressions qui s'exercent de part et d'autre du barrage en fonction de z.
2. En raisonnant dans le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), exprimer la résultante des forces de pression $\vec{dF}$ qui s'exercent sur le barrage en fonction dS et des données du problème.
3. Expliquer pourquoi on peut se convaincre que seule la composante suivant x de la force résultante a une contribution non nulle. Appuyez-vous sur un schéma pour étayer votre discussion.
4. Calculer alors la force pression résultante F_x qui s'exerce sur le barrage.
5. En déduire la valeur de la force que doit supporter la falaise pour résister à la pression de l'eau. On prendra $h = R = 100$ m.

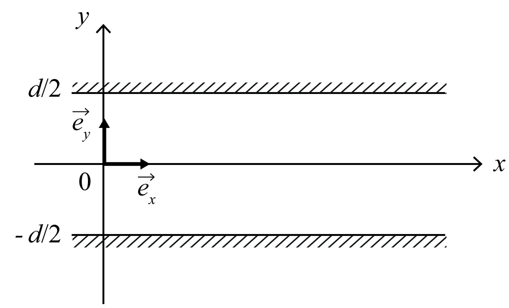
Exercice 3 : Question de cours (2 points)

1. Rappeler l'expression du théorème de transport de la masse pour un volume de contrôle matériel (VC).
2. En déduire la loi de conservation de la masse (équation de continuité).

EXERCICE 4 : Écoulement de Poiseuille (6 points)

L'écoulement stationnaire d'un fluide soumis à une différence de pression et situé entre deux plaques parallèles au plan (x, z) positionnées en $y = \pm d/2$ est caractérisé par le champ vitesse

$$\vec{v} = v_0 \left(1 - \frac{4y^2}{d^2}\right) \vec{e}_x.$$



1. Dessiner le profil de vitesse dans le plan (x, y) en justifiant son allure à l'aide d'arguments simples.
2. Cet écoulement est-il incompressible ?
3. Déterminer la trajectoire suivie par une particule fluide.
4. Rappeler la définition d'une ligne de courant et les caractériser dans le cadre de cet écoulement. Coïncident-elles avec les trajectoires ?
5. Calculer le champ de vorticité $\vec{\omega}$. Commenter le résultat obtenu.
6. Déterminer le champ de vecteurs accélération $\vec{a}$.