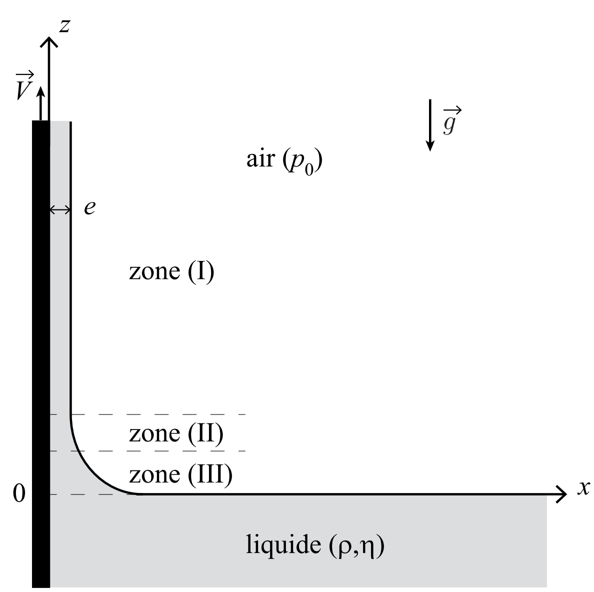
# Examen de Mécanique des fluides

jeudi 21 décembre 2023
(durée : 2 heures – sans document - barème indicatif)

<u>Formulaire :</u>
Principe Fondamental de la Dynamique : $\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\mathrm{VC}} \rho\vec{v}\, d\tau = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}}$
Équation de Navier-Stokes : $\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$

## Dip-coating (10 points)

L'enduction par trempage (dip-coating en anglais) consiste à immerger puis à retirer un objet d'un bain liquide pour l'enduire de celui-ci, avec des applications industrielles multiples : traitement de surfaces, revêtement de peinture, enrobage alimentaire, etc.
On souhaite réaliser un dépôt de liquide en couche mince sur une plaque plane. Pour ce faire, la plaque, initialement immergée dans un bain liquide, est tirée verticalement à une vitesse $\vec{V}$ constante de telle sorte que l'on reste en régime stationnaire.




Trois zones distinctes sont observées dans ce type d'écoulement :
- (I) Région asymptotique : le film liquide est entraîné par la plaque et reste d'épaisseur constante $e$.
- (II) Région de lubrification : l'écoulement est faiblement non parallèle et les effets visqueux sont dominants.
- (III) Ménisque statique : les forces de tension de surface et la gravité contrôlent la forme du ménisque.

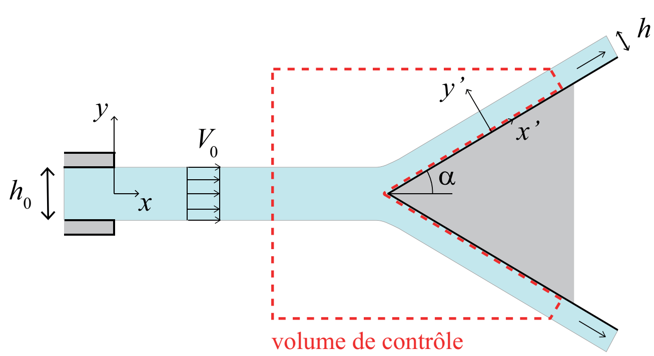
On ne s'intéressera ici qu'à la zone (I) dans laquelle l'épaisseur du film est constante. Le fluide sera considéré comme incompressible, de masse volumique $\rho$ et de viscosité $\eta$. On supposera l'écoulement unidirectionnel tel que $\vec{v} = v_z(x,z)\vec{e}_z$.

On note $p_0$ la pression atmosphérique de l'air, de masse volumique et de viscosité négligeables de sorte que la contrainte visqueuse exercée par l'air sur le liquide pourra être considérée comme nulle.

1. Rappeler les deux hypothèses sur le fluide qui permettent d'établir d'équation de Navier-Stokes.
2. Montrer que $v_z \equiv v_z(x)$.
3. Simplifier l'équation de Navier-Stokes en justifiant votre réponse.
4. En projetant l'équation de Navier-Stokes suivant $x$ et en précisant la condition aux limites dynamique sur la pression, montrer que la pression dans le fluide (zone I) est partout égale à la pression atmosphérique $p_0$.
5. Projeter l'équation de Navier-Stokes suivant $z$ et préciser les conditions aux limites cinématique et dynamique. En déduire que le profil de vitesse du fluide $v_z(x)$ s'écrit
$$v_z(x) = \frac{\rho g}{2\eta} x(x-2e) + V.$$
6. En déduire l'expression de la vitesse du liquide à l'interface en $x = e$ et donner une condition sur $V$ pour que celle-ci soit positive ou négative. Tracer l'allure du profil de vitesse dans ces deux cas.
7. Exprimer le débit volumique $Q_v$ par unité de profondeur dans la direction $y$. À quelle condition peut-on écrire que $Q_v \simeq Ve$ ? Quel est le signe de la vitesse à l'interface dans ce cas ?
8. On considère une tranche de fluide de largeur $e$ et de hauteur $dz$. Exprimer la force élémentaire $d\vec{F}$ par unité de profondeur selon $y$ exercée par la plaque sur cette tranche de fluide. Discuter le résultat en raisonnant sur le bilan des forces qui s'appliquent sur cette tranche de fluide.

## Jet impactant un coin (10 points)

On considère le jet d'une nappe de fluide de masse volumique $\rho$ impactant un coin solide d'angle intérieur $2\alpha$ de façon symétrique (voir figure). On pourra se restreindre à l'étude d'un écoulement bidimensionnel, dans le plan $(x, y)$, la dimension transverse $L$ étant grande devant les autres dimensions du problème (on néglige les effets de bord). On souhaite déterminer la force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur le coin.
Loin en amont de l'impact, l'épaisseur du jet est $h_0$ et sa vitesse est supposée constante de valeur $V_0$. En aval, le jet reste symétrique de part et d'autre du coin et l'écoulement est stationnaire et incompressible.
On négligera les effets de la pesanteur et de la pression atmosphérique.



## Partie I : Cas d'un fluide parfait

1. Rappeler ce qu'est un fluide parfait. En aval de l'impact, pourquoi peut-on considérer un profil de vitesse uniforme sur toute l'épaisseur du jet si le fluide est parfait ? On supposera que le fluide conserve sa vitesse $V_0$. Faire un schéma du profil de vitesse attendu.
2. Rappeler la définition du débit volumique $Q_v$. Par conservation du débit, en déduire l'épaisseur $h$ du fluide sur les bord du coin loin en aval.
3. On se propose de déterminer la force $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$ subie par le coin.
   (a) En écrivant le principe fondamental de la dynamique et en appliquant le théorême de transport de la quantité de mouvement à travers le volume de contrôle représenté en pointillés sur la figure, en déduire l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur le coin.
   (b) Quels sont la direction et le sens de cette force ?
   (c) Quelle est l'origine de cette force ?

## Partie II : Cas d'un fluide visqueux

On considère désormais un fluide visqueux, de viscosité dynamique $\eta$.

1. Pourquoi s'attend-on à une modification du profil de vitesse en aval du coin par rapport au cas du fluide parfait. Faire un schéma du profil de vitesse attendu en aval.
2. On suppose que le profil de vitesse en aval est de la forme $v(y') = V_0 \sin(\pi y'/2h)$, où $y'$ est l'axe local perpendiculaire à la paroi du coin (voir figure). Ce profil satisfait-il les conditions aux limites cinématiques ? Justifier votre réponse.
3. En s'appuyant sur la conservation du débit, déterminer l'épaisseur $h$ de l'écoulement en aval du coin.
4. (a) Comme à la question 3(a) de la partie I, déterminer l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur le coin.
   On rappelle que $\sin^2 X = [1 - \cos(2X)]/2$.
   (b) La viscosité intervient-elle dans l'expression de la force trouvée ? Commenter.

## Partie III : Comparaison fluide parfait / fluide visqueux

1. Comparer l'épaisseur du fluide obtenue dans le cas visqueux à l'épaisseur $h_0$ du jet incident et à l'épaisseur trouvée dans le cas du fluide parfait.
2. Tracer sur un même graphique les forces subies par le coin dans le cas d'un fluide parfait et d'un fluide visqueux en fonction de l'angle $\alpha$. Commenter la différence de valeur de force pour les angles $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$.