TD n°3 : Effet Talbot _ Corrigé

1.1_ $$E(\vec{r},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \mathcal{E}_0 e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} + \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \mathcal{E}_0^* e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$$

$$= \mathcal{E}_0 e^{ik_0 z} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\omega-\omega_0)t} + \mathcal{E}_0^* e^{-ik_0 z} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\omega+\omega_0)t}$$

$$E(\vec{r},\omega) = 2\pi \mathcal{E}_0 e^{ik_0 z} \delta(\omega-\omega_0) + 2\pi \mathcal{E}_0^* e^{-ik_0 z} \delta(\omega+\omega_0)$$

En $z=0^-$: $$E_0(\omega) = 2\pi \mathcal{E}_0 \delta(\omega-\omega_0) + 2\pi \mathcal{E}_0^* \delta(\omega+\omega_0)$$

1.2_ $$E(x,y,z=0^+,\omega) = t(x,y)\, E_0(\omega) = \frac{1}{2}\left(1 + m\cos Kx\right) E_0(\omega) \qquad \boxed{K = 2\pi/p}$$

$$= \frac{E_0(\omega)}{2}\left[1 + \frac{m}{2} e^{iKx} + \frac{m}{2} e^{-iKx}\right]$$

1.3_ $$E(k_x,k_y,z=0^+,\omega) = \frac{E_0(\omega)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-ik_y y} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ik_x x} \left(1 + \frac{m}{2} e^{iKx} + \frac{m}{2} e^{-iKx}\right)$$

$$= \frac{E_0(\omega)}{2}\, 2\pi\, \delta(k_y) \left[2\pi\delta(k_x) + 2\pi\frac{m}{2}\delta(k_x-K) + 2\pi\frac{m}{2}\delta(k_x+K)\right]$$

1.4_ $$E(k_x,k_y,z,\omega) = E(k_x,k_y,z=0^+,\omega)\, e^{i\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\, z} \qquad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

TF inverse en k_x, k_y :

$$E(x,y,z,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dk_x\, dk_y\, E(k_x,k_y,z,\omega)\, e^{ik_x x} e^{ik_y y}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dk_x\, dk_y\, E(k_x,k_y,z=0^+,\omega)\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{i\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\, z}$$

$$= \frac{E_0(\omega)}{2} \iint dk_x\, dk_y\, e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{i\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\, z}$$

$$\times\, \delta(k_y)\left[\delta(k_x) + \frac{m}{2}\delta(k_x-K) + \frac{m}{2}\delta(k_x+K)\right]$$

$$E(x,y,z,\omega) = \frac{E_0(\omega)}{2} \int dk_x \, e^{ik_x x} e^{i\sqrt{k^2-k_x^2}\,z} \times \left[\delta(k_x) + \frac{m}{2}\delta(k_x - K) + \frac{m}{2}\delta(k_x+K)\right]$$

$$= \frac{E_0(\omega)}{2}\left[e^{ikz} + \frac{m}{2} e^{iKx} e^{i\sqrt{k^2-K^2}\,z} + \frac{m}{2} e^{-iKx} e^{i\sqrt{k^2-K^2}\,z}\right]$$

$$= \frac{E_0(\omega)}{2}\left[e^{ikz} + m\cos Kx \, e^{i\sqrt{k^2-K^2}\,z}\right]$$

$$\boxed{E(x,y,z,\omega) = \frac{E_0(\omega)}{2} e^{ikz}\left[1 + m\cos Kx \, e^{i\left(\sqrt{k^2-K^2}-k\right)z}\right]} \quad (*)$$

1.5 – $I(x,y,z) = \frac{I_0}{4}\left[1 + 2m\cos Kx \cos\left[\left(\sqrt{k^2-K^2}-k\right)z\right] + m^2\cos^2 Kx\right]$

1.6 – Juste derrière le réseau, en $z=0$, l'intensité est $\frac{I_0}{4}\left(1 + 2m\cos Kx + m^2\cos^2(Kx)\right)$. Donc $(*)$ a la même forme à chaque fois que

$$\cos\left[\left(\sqrt{k^2-K^2}-k\right)z\right] = 1$$

$$\text{Donc } z_q = q\,\frac{2\pi}{k-\sqrt{k^2-K^2}}, \quad q \in \mathbb{N}$$

si $p \gg \lambda_0$, alors $K \ll k$, et $k - \sqrt{k^2-K^2} = k\left(1-\sqrt{1-\frac{K^2}{k^2}}\right) \simeq \frac{K^2}{2k}$

$$z_q = q\,\frac{2\pi}{K^2}\,2k = q\,\frac{2p^2}{\lambda}$$

Pour notre onde monochromatique : $\lambda = \lambda_0$ et $\boxed{z_q = q\,\frac{2p^2}{\lambda_0}}$

1.7- Donc l'image redevient périodiquement identique, avec une période $\frac{2p^2}{d} = \frac{2.(0,1)^2}{0,5\times10^{-3}} = 40$ mm

1.8- Le contraste est inversé quand le cos vaut -1 au lieu de 1, c'est à dire :

$$z'_q = \frac{(2q+1)\pi}{k-\sqrt{k^2-K^2}} = \left(q+\frac{1}{2}\right)\frac{2p^2}{\lambda_0}$$

1.9- L'image a une fréquence spatiale double quand le cos est nul. Il ne reste alors dans (*) que le terme en $\cos^2 Kx$ qui oscille deux fois plus vite.

$$z''_q = \left(q+\frac{1}{2}\right)\frac{p^2}{\lambda_0}$$

1.10- Si le réseau n'est plus sinusoïdal, il contient des fréquences spatiales harmoniques de K, de la forme nK avec $n \in \mathbb{N}$. Pour une telle fréquence, les z_q deviennent :

$$z_q^{(n)} = q\,\frac{2(p/n)^2}{\lambda_0} = \frac{q}{n^2}\,\frac{2p^2}{\lambda_0} = z_{q/n^2}.$$

Il y aura auto-imagerie aux distances z_q telles que q est un multiple entier de n^2, mais pour une partie seulement des fréquences spatiales de l'objet de départ

2-1 A la question 1.3, on a obtenu :

$$E(k_x,k_y,0,\omega) = \frac{E_0(\omega)}{2}\, 2\pi\delta(k_y)\, 2\pi\left[\delta(k_x) + \frac{m}{2}\delta(k_x-K) + \frac{m}{2}\delta(k_x+K)\right]$$

Donc (5) donne :

$$E(x,y,z,\omega) = \frac{-ik}{2\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\delta(ky/z)(4\pi^2)E_0(\omega)\left[\delta(kx/z) + \frac{m}{2}\delta\left(\frac{kx}{z}-K\right) + \frac{m}{2}\delta\left(\frac{kx}{z}+K\right)\right] \quad (**)$$

2.2 On obtient clairement un résultat différent de (*) !!!
la raison de ce désaccord provient du fait que (**) est faux.
En effet l'approximation de Fraunhofer n'est pas valable ici car en présence d'un éclairement non limité transversalement dans le plan $z=0$ (onde plane + réseau infini), on n'est jamais dans les conditions telles que z soit assez grand par rapport à x et y pour pouvoir appliquer Fraunhofer.

2.3 Imaginons maintenant que l'éclairement soit limité transversalement par une fonction $F(x,y)$ donnée. Alors :

$$E(x,y,z=0^+,\omega) = F(x,y)\frac{E_0(\omega)}{2}\left(1 + \frac{m}{2}e^{iKx} + \frac{m}{2}e^{-iKx}\right)$$

$$E(k_x,k_y,z=0^+,\omega) = \frac{E_0(\omega)}{2}\left[\tilde{F}(k_x,k_y) + \frac{m}{2}\tilde{F}(k_x+K,k_y) + \frac{m}{2}\tilde{F}(k_x-K,k_y)\right]$$

$$E(x,y,z,\omega) = \frac{E_0(\omega)}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\iint dk_x\,dk_y\left[\tilde{F}(k_x,k_y) + \frac{m}{2}\tilde{F}(k_x+K,k_y) + \frac{m}{2}\tilde{F}(k_x-K,k_y)\right]e^{ik_x x}e^{ik_y y}e^{i\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\,z}$$

A l'approximation $z \gg x, y$, on a $k_x, k_y \ll k$

$$\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \simeq k - \frac{k_x^2}{2k} - \frac{k_y^2}{2k}$$

Les phase $k_x x - \frac{k_x^2}{2k} z$ et $k_y y - \frac{k_y^2}{2k} z$ ont des

dérivées nulles pour $k_x = \frac{kx}{z}$ et $k_y = \frac{ky}{z}$.

On a alors, pour ces valeurs de k_x et k_y :

$$e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{-i\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}\, z}$$

$$\simeq \exp\left(i\frac{kx}{z}\right)\exp\left(i\frac{ky}{z}\right) e^{ikz} \exp\left(-\frac{i}{2k}\frac{k^2x^2}{z^2} z\right)\exp\left(-\frac{i}{2k}\frac{k^2y^2}{z^2} z\right)$$

$$\simeq \underbrace{\exp\left(i\frac{kx}{z}\right)\exp\left(i\frac{ky}{z}\right)}_{\simeq 1} \underbrace{e^{ikz} \exp\left(-i\frac{kx^2}{2z}\right)\exp\left(-i\frac{ky^2}{2z}\right)}_{\simeq e^{ikr}}$$

$$E(x,y,z,\omega) \propto e^{ikr}\left[\tilde{F}\left(\frac{kx}{z}, \frac{ky}{z}\right) + \frac{m}{2}\tilde{F}\left(\frac{kx}{z}+K, \frac{ky}{z}\right) + \frac{m}{2}\tilde{F}\left(\frac{kx}{z}-K, \frac{ky}{z}\right)\right]$$