TD 3 : Corrigé

Exercice 1 Propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif

- Onde plane, impulsion lumineuse de profil temporel gaussien (fréquence centrale ω_p), qui se propage suivant Oz.
- Propagation dans un milieu linéaire, homogène, isotrope, non-magnétique, d'indice de réfraction $n(\omega)$.
- La dispersion est caractérisée par un coefficient de dispersion de delai de groupe β_2 ($\beta_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{d^2k}{d\omega^2}\Big|_{\omega_p}$).
- Le champ électrique, noté $E(z,t)$, est polarisé selon la direction Ox.
- À l'entrée du milieu (en $z=0$), le champ présente un *chirp* en fréquence C_0 :

$$E(z=0,t) = E^{(+)}(z=0,t) + c.c. = E_0 e^{-\frac{1+iC_0}{2}\frac{t^2}{\Delta t_0{}^2}} e^{-i\omega_p t} + c.c. \tag{1}$$

- Les transformées de Fourier $E^{(+)}(z,\omega)$ et $D^{(+)}(z,\omega)$ sont définies par :

$$E^{(+)}(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, E^{(+)}(z,\omega)\, e^{-i\omega t} \tag{2}$$

$$D^{(+)}(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, D^{(+)}(z,\omega)\, e^{-i\omega t} \tag{3}$$

- Formulaire : intégrales valables pour σ complexe :

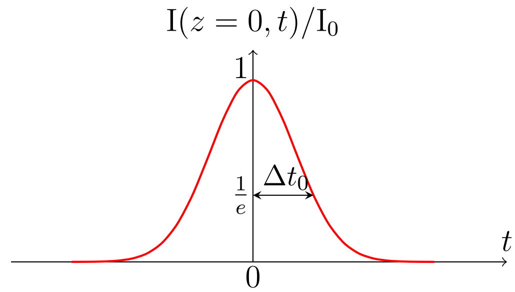
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\sigma^2} e^{iuv}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} e^{-\frac{v^2}{4\sigma^2}} \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u+i\alpha)^2}{\sigma^2}\right] du = \sqrt{\pi}\sigma \tag{5}$$

1.1 Intensité lumineuse en $z = 0$ en fonction du temps :

$$\mathrm{I}(z=0,t) \propto |E^{(+)}(z=0,t)|^2 = \mathrm{I}_0\, e^{-\frac{t^2}{\Delta t_0{}^2}}$$

où $\mathrm{I}_0 = |E_0|^2$.



1.2 Spectre de l'impulsion :

$$E^{(+)}(z=0,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, E^{(+)}(z=0,t)\, e^{i\omega t} = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-\frac{1+iC_0}{2\,\Delta t_0{}^2}t^2}\, e^{i(\omega-\omega_p)t}$$

On pose $\left| \begin{array}{lcl} v & = & \omega - \omega_p \\ \sigma^2 & = & \frac{1+iC_0}{2\Delta t_0{}^2} \end{array} \right.$. En utilisant la relation (4), on obtient : $E^{(+)}(z=0,\omega) = E_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} e^{-\frac{v^2}{4\sigma^2}}$.

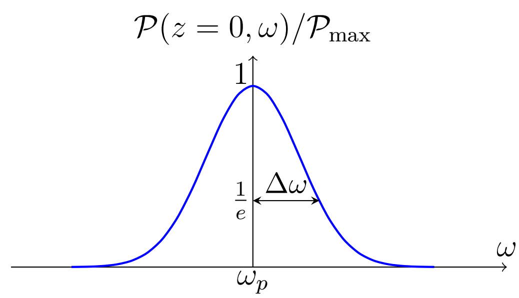
En revenant aux variables d'origine, on a :

$$E^{(+)}(z=0,\omega) = E_0 \Delta t_0 \sqrt{\frac{2\pi}{1+iC_0}}\, e^{-\frac{\Delta t_0{}^2(\omega-\omega_p)^2}{2(1+iC_0)}} \tag{6}$$

La densité spectrale de puissance :

$$\mathcal{P}(z=0,\omega) = \left|E^{(+)}(z=0,\omega)\right|^2 = \frac{2\pi}{\sqrt{1+C_0^2}} E_0^2 \Delta t_0{}^2\, e^{-\frac{\Delta t_0{}^2(\omega-\omega_p)^2}{1+C_0^2}} \tag{7}$$

On pose $\left| \begin{array}{lcl} \mathcal{P}_{\max} & = & \frac{2\pi}{\sqrt{1+C_0^2}} E_0^2 \Delta t_0{}^2 \\ \Delta\omega & = & \sqrt{1+C_0^2}/\Delta t_0 \end{array} \right.$



On a $\Delta\omega\, \Delta t_0 = \sqrt{1+C_0^2} > 1$. À cause du *chirp*, l'impulsion n'est pas limitée par TF (transformée de Fourier). (Une impulsion est limitée par TF si $\Delta\omega\, \Delta t_0 = 1$, i.e. $C_0 = 0$)

1.3 Éqs. de Maxwell dans le milieu :

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{libre}} = 0 & \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array}$$

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0$ implique $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$.

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = -\mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

L'équation de propagation qui relie $\vec{E}(z,t)$ et $\vec{D}(z,t)$ est alors :

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{8}$$

1.4 On cherche l'éq. de propagation pour $E^{(+)}(z,t)$ en fonction de $k(\omega)=n(\omega)\frac{\omega}{c}$. L'éq. (8) est vérifiée par $E^{(+)}(z,t)$ et $D^{(+)}(z,t)$ (linéarité de l'équation):

$$\Delta E^{(+)}(z,t) - \mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}D^{(+)}(z,t) = 0 \tag{9}$$

En utilisant (3), on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}D^{(+)}(z,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega D^{(+)}(z,\omega)e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\underbrace{\left(-\omega^2 D^{(+)}(z,\omega)\right)}_{\text{TF de }\frac{\partial^2 D^{(+)}}{\partial t^2}} e^{-i\omega t}$$

La TF de l'éq.(9) est :

$$\Delta E^{(+)}(z,\omega) + \mu_0\omega^2 D^{(+)}(z,\omega) = 0$$

En tenant compte du fait que pour le milieu linéaire, homogène et isotrope on a $\vec{D}^{(+)}(z,\omega) = \varepsilon_0 n^2(\omega)\vec{E}^{(+)}(z,\omega)$, on obtient :

$$\Delta E^{(+)}(z,\omega) + n^2(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}E^{(+)}(z,\omega) = 0 \tag{10}$$

ou équivalent, dans le cas traité ici :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E^{(+)}(z,\omega) + k^2(\omega)E^{(+)}(z,\omega) = 0 \tag{11}$$

La solution de (11), correspondant à une onde qui se propage dans le sens des z croissants est sous la forme :

$$E^{(+)}(z,\omega) = E^{(+)}(z=0,\omega)e^{ik(\omega)z} \tag{12}$$

1.5 Développement limité de $k(\omega)$ autour de ω_p :

$$k(\omega) \simeq \underbrace{k(\omega_p)}_{k_p} + \underbrace{\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_p}}_{1/v_g}(\omega-\omega_p) + \frac{1}{2}\underbrace{\left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega_p}}_{\beta_2}(\omega-\omega_p)^2$$

En introduisant ce DL dans (12) et en tenant compte de (6), on obtient (en laissant de côté les constantes multiplicatives) :

$$E^{(+)}(z,\omega) \propto e^{ik_p z} e^{i\frac{z}{v_g}(\omega-\omega_p)} e^{-\left[\frac{\Delta t_0^2}{2(1+iC_0)} - i\frac{\beta_2 z}{2}\right](\omega-\omega_p)^2}$$

En calculant la TF inverse, on a :

$$E^{(+)}(z,t) \propto e^{ik_p z} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\frac{z}{v_g}(\omega-\omega_p)} e^{-\left[\frac{\Delta t_0^2}{2(1+iC_0)} - i\frac{\beta_2 z}{2}\right](\omega-\omega_p)^2}\, e^{-i\omega t}$$

On pose : $\left| \begin{array}{lcl} u & = & \omega - \omega_p \\ v & = & \frac{z}{v_g} - t \\ \tilde{\sigma}_z^2 & = & \frac{\Delta t_0^2}{2(1+iC_0)} - i\frac{\beta_2 z}{2} = \frac{\Delta t_0^2 + \beta_2 C_0 z - i\beta_2 z}{2(1+iC_0)} \end{array} \right.$. L'intégrale devient :

$$E^{(+)}(z,t) \propto e^{i(k_p z - \omega_p t)} \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{iuv} e^{-\tilde{\sigma}_z^2 u^2}$$

En utilisant (4), on obtient :

$$E^{(+)}(z,t) \propto \tilde{\sigma}_z^{-1}\, e^{i(k_p z - \omega_p t)} \exp\left[-\frac{(t-\frac{z}{v_g})^2}{4\tilde{\sigma}_z^2}\right] \tag{13}$$

1.6 On cherche à mettre $\frac{1}{4\tilde{\sigma}_z^2}$ sous la forme $\frac{1+iC(z)}{2\,\Delta t(z)^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\tilde{\sigma}_z^2} &= \frac{1+iC_0}{2(\Delta t_0^2 + \beta_2 C_0 z - i\beta_2 z)} = \frac{1+iC_0}{2\Delta t_0^2\left[\left(1+\frac{\beta_2 C_0 z}{\Delta t_0^2}\right) - i\frac{\beta_2 z}{\Delta t_0^2}\right]} = \frac{(1+iC_0)\left[\left(1+\frac{\beta_2 C_0 z}{\Delta t_0^2}\right) + i\frac{\beta_2 z}{\Delta t_0^2}\right]}{2\Delta t_0^2\left[\left(1+\frac{\beta_2 C_0 z}{\Delta t_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\Delta t_0^2}\right)^2\right]} \\ &= \frac{1+i\left[C_0 + \frac{\beta_2 z}{\Delta t_0^2}(1+C_0^2)\right]}{2\Delta t_0^2\left[\left(1+\frac{\beta_2 C_0 z}{\Delta t_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\Delta t_0^2}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

On identifie:

$$C(z) = C_0 + \frac{\beta_2 z}{\Delta t_0^2}\left(1+C_0^2\right) \tag{14}$$

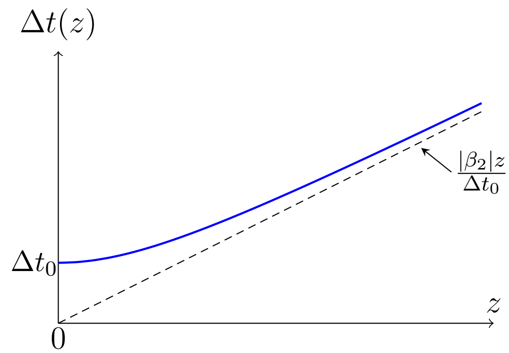
$$\Delta t(z) = \Delta t_0 \sqrt{\left(1+\frac{\beta_2 C_0 z}{\Delta t_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{\Delta t_0^2}\right)^2} \tag{15}$$

1.7

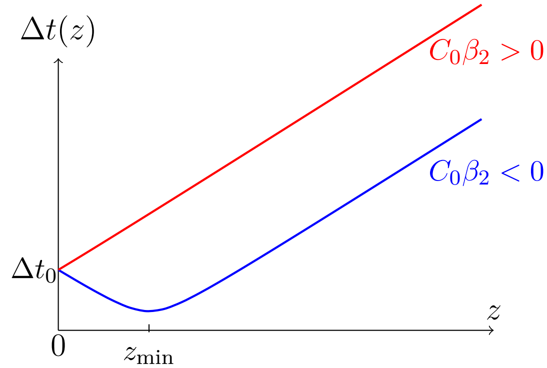
- $C_0 = 0$ (pas de *chirp*)

$$\Delta t(z) = \Delta t_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_2 z}{\Delta t_0^2}\right)^2}$$

L'impulsion s'étale.



- $C_0 \neq 0$
On utilise (15).



  - Si $C_0\beta_2 > 0$, l'impulsion s'étale.
  - Si $C_0\beta_2 < 0$, l'impulsion se comprime pour $z < z_{\min}$ ($z_{\min}$ correspond à la distance pour laquelle la largeur temporelle de l'impulsion est minimale) et s'étale pour $z > z_{\min}$.

1.8 On utilise (15) et on cherche $\left.\frac{d}{dz}\Delta t^2(z)\right|_{z_{\min}} = 0$. On a $2\Delta t_0^2 \left[\frac{\beta_2 C_0}{\Delta t_0^2}\left(1 + \frac{\beta_2 C_0 z_{\min}}{\Delta t_0^2}\right) + \frac{\beta_2^2 z_{\min}}{\Delta t_0^4}\right] = 0$, ce qui implique :

$$z_{\min} = -\frac{C_0 \Delta t_0^2}{\beta_2 \left(1 + C_0^2\right)} \tag{16}$$

La largeur temporelle correspondante est :

$$\Delta t_{\min} = \Delta t(z_{\min}) = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 + C_0^2}} \tag{17}$$

On retrouve $\Delta t_{\min}\Delta\omega = 1$ (voir l'éq. (7) et la discussion après) : l'impulsion est limitée par TF et n'est plus chirpée en $z = z_{\min}$.

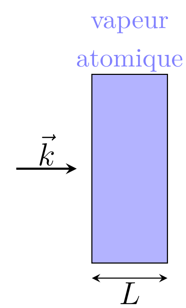
1.9

$$\left.\begin{array}{lcl} \lambda_p & = & 1150 \text{ nm} \\ \Delta t_0 & = & 100 \text{ fs} = 0.1 \text{ ps} \\ C_0 & = & 3 \\ \beta_2 & = & -0.02 \text{ ps}^2/\text{m} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{lcl} z_{\min} & = & 15 \text{ cm} \\ \Delta t_{\min} & = & 32 \text{ fs} \end{array}$$

Exercice 2 Relation de Kramers-Kronig

- Vapeur atomique confinée dans une cellule d'épaisseur L;
- La cellule est éclairée par un laser continu (vecteur d'onde k, fréquence ω);
- On mesure la transmission à travers la cellule;
- La vapeur est décrite par la susceptibilité $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ et l'indice de réfraction $n(\omega)$ $\chi'(\omega)$ et $\chi''(\omega)$ sont reliés par la relation de Kramers-Kronig :

$$\chi'(\omega) = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega - \omega'} d\omega' \tag{1}$$



- La fréquence du laser ω est proche de celle d'une résonance atomique ω_0
- Formulaire :

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{B-u} du = \frac{\pi B}{1+B^2} \tag{2}$$

2.1 $n^2 = \varepsilon_r = 1 + \chi$

2.2 $|\chi| \ll 1$. $n = (1+\chi)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\chi = 1 + \frac{\chi'}{2} + i\frac{\chi''}{2}$.

2.3 Champ électrique à l'entrée de la cellule ($z = 0$) :

$$E^+(z=0,t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

Champ électrique à l'intérieur de la cellule :

$$E^+(z,t) = E_0 e^{-i\omega t} e^{inkz} = E_0 e^{-\frac{\chi''}{2}kz} e^{-i[\omega t - (1+\frac{\chi'}{2})kz]}$$

Champ électrique à la sortie de la cellule ($z = L$) :

$$E^+(z=L,t) = E_0 e^{-\frac{\chi''}{2}kL} e^{-i[\omega t - (1+\frac{\chi'}{2})kL]}$$

La transmission en intensité :

$$T = \frac{|E^+(z=L,t)|^2}{|E^+(z=0,t)|^2} = e^{-\chi'' kL}$$

2.4 $\chi'' = -\frac{1}{kL}\ln(T)$

2.5 On admet que χ'' se met sous la forme d'une lorentzienne :

$$\chi''(\omega) = \frac{A}{1+4\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Gamma^2}} \tag{3}$$

On utilise la relation de Kramers-Kronig (1) :

$$\chi'(\omega) = -\frac{A}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega-\omega'}\frac{1}{1+4\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Gamma^2}}\,d\omega'$$

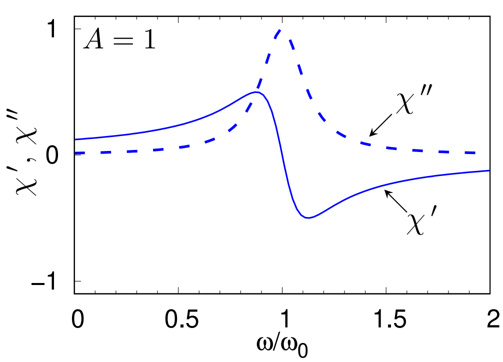
On pose : $u = \frac{2(\omega'-\omega_0)}{\Gamma} \Rightarrow du = \frac{2}{\Gamma}d\omega'$ et $\omega' = \frac{\Gamma}{2}u+\omega_0$. $\chi'(\omega)$ devient alors :

$$\chi'(\omega) = -\frac{\Gamma A}{2\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega-\omega_0-\frac{\Gamma}{2}u}\frac{1}{1+u^2}\,du = -\frac{A}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{2}{\Gamma}(\omega-\omega_0)-u}\frac{1}{1+u^2}\,du$$

En utilisant (2) avec $B = \frac{2}{\Gamma}(\omega-\omega_0)$, on obtient :

$$\chi'(\omega) = -A\frac{\frac{2(\omega-\omega_0)}{\Gamma}}{1+\frac{4(\omega-\omega_0)^2}{\Gamma^2}} \tag{4}$$

Rq. Pour $\omega = \omega_0 \pm \frac{\Gamma}{2}$ on a $\chi'(\omega) = \mp\frac{A}{2}$



2.6 On peut par exemple placer la cellule dans un des bras d'un interféromètre de Michelson.