

Chapitre 2

Principes de la relativité restreinte et transformation de Lorentz

Sommaire

2.1	Postulats de la relativité restreinte	9
2.2	Transformation spéciale de Lorentz	11
2.3	Premières conséquences	15
2.4	Vérifications expérimentales du 2 ^e postulat	19
2.5	Autres vérifications expérimentales (*)	21

Introduction

Comme on l'a vu au chapitre précédent, il existe une incompatibilité entre le principe de relativité dans son expression classique (§ 1.2) et l'électromagnétisme. De façon un peu surprenante, la relativité va laisser intacte les lois de l'électromagnétisme et profondément modifier les lois de la mécanique, beaucoup plus anciennes.

Deux exemples permettent de souligner que la théorie de la relativité a été longue à s'imposer dans les esprits :

1. **Einstein** a reçu le Prix Nobel de physique en 1922 pour l'effet photoélectrique, mais pas pour la relativité. Et pourtant, les deux concepts dataient de la même année!
2. A part à l'Ecole Polytechnique, il a fallu attendre les années 1960 pour que la relativité soit enseignée en France, si l'on exclu le cours de **Langevin** au Collège de France en 1911.

2.1 Postulats de la relativité restreinte

2.1.1 Enoncés

En mécanique classique, on sait qu'il existe des référentiels (appelés *inertiels* ou *galiléens*) où le temps est uniforme, l'espace homogène et isotrope, tels que, par rapport à ces référentiels, toute particule libre, soumise à l'action d'aucun champ extérieur, est soit au repos, soit animée d'un mouvement rectiligne uniforme. La théorie mentionnée ici est dite *restreinte* car elle ne considère que les référentiels d'inertie, c'est-à-dire animés les uns par rapport aux autres de mouvements de translation uniformes, à vitesse constante.

En particulier, la relativité restreinte ne prend pas en compte la gravitation. **Einstein** attendra 1915 pour généraliser la relativité restreinte à tous les référentiels dans la *relativité générale*.

Le principe de la relativité est le 1^{er} postulat énoncé par **Einstein** en 1905 dans son article *Sur l'électrodynamique des corps en mouvements*¹ :

Tous les référentiels inertiels sont équivalents pour décrire les lois fondamentales de la nature qui dans ces référentiels prennent la même forme et se traduisent par des équations invariantes par changement de référentiel.

Le principe de constance de la vitesse de la lumière est le 2^e postulat énoncé par **Einstein** en 1905 dans le même article :

Il existe une vitesse limite pour toute propagation des interactions ou signaux. Cette vitesse est une constante universelle qui correspond également à la vitesse de propagation de la lumière dans l'espace vide de charges et de courants.

Une conséquence immédiate de ce principe est que la vitesse de propagation de la lumière dans le vide a la même valeur c par rapport à tout référentiel inertiel et ne dépend donc pas, en particulier, du mouvement de la source qui l'émet.

Pour aider à la compréhension de ces deux principes, **Einstein** a formulé le *principe d'équivalence* :

Pour des vitesses petites devant celle de la lumière, on retrouve au 1^{er} ordre les lois de la mécanique newtonienne et la transformation de Galilée.

Remarque : Les énoncés des postulats de la relativité peuvent varier légèrement d'un auteur à un autre. Ceux utilisés ici sont principalement basés sur la formulation de [2].

2.1.2 Première conséquence : relativité du temps et des longueurs

Relativité du temps

On appelle *coïncidence* le fait que deux événements se produisent en un même point de l'espace. Cette coïncidence est un fait absolu, indépendant du référentiel.

On appelle *intervalle de temps propre* l'intervalle de temps séparant deux indications d'une même horloge dans le référentiel où elle est au repos (le *référentiel propre*). Tout autre intervalle de temps est appelé *intervalle de temps impropre*.

On considère deux points A et B immobiles dans un même référentiel d'inertie (\mathcal{R}) et distants de AB . Si à l'instant t_A d'une horloge placée en A un signal lumineux est émis en direction d'une horloge placée en B , cette horloge est dite *synchrone* avec la première si le signal est reçu par l'horloge placée en B à l'instant t_B donné par :

$$t_B = t_A + \frac{AB}{c}$$

Deux événements ayant lieu en deux points A et B d'un même référentiel d'inertie (\mathcal{R}) sont dits *simultanés* si la réception de signaux lumineux émis en A à l'instant t_A et en B à l'instant t_B constituent pour un observateur placé en M milieu de AB , deux événements en coïncidence (Figure 2.1).

Une mesure de temps se résume donc toujours à la constatation de la simultanéité de deux événements en un même point de l'espace.

On considère désormais (Figure 2.2) un deuxième observateur en M' dans un autre référentiel (\mathcal{R}'), en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{u} par rapport à (\mathcal{R}). On suppose qu'à l'instant $t_A = t_B$ dans (\mathcal{R}), cet observateur se trouve en M .

Dans (\mathcal{R}'), les signaux lumineux se déplacent à la vitesse c . Comme l'observateur se déplace vers B , la réception du signal émis par B se fera avant celle du signal émis par A . Les événements ne sont plus simultanés.

1. Pour les amateurs, voir A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17**, 891 (1905) dont il existe heureusement une traduction française (*Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*, Gauthier-Villias, 1925).

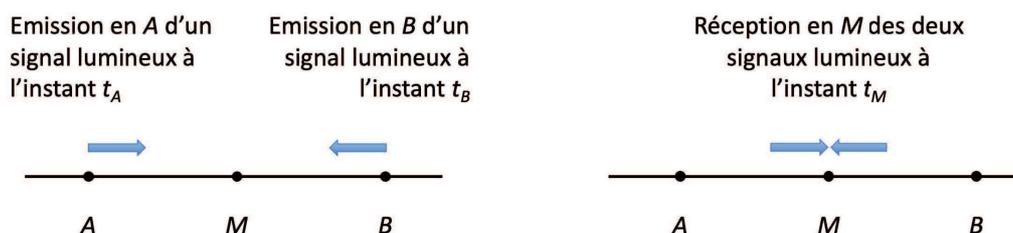


FIGURE 2.1 – Deux événements simultanés correspondent à la détection simultanée de deux événements au même point d'un même référentiel (Figure reprise de [2]).

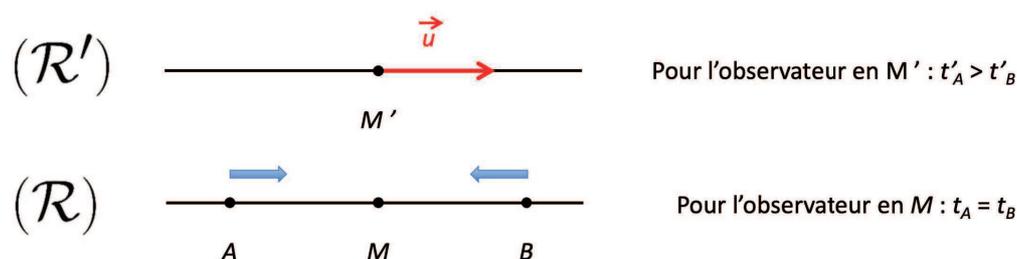


FIGURE 2.2 – Deux événements simultanés dans un référentiel ne le sont plus dans un autre (Figure reprise de [2]).

On vient de montrer une conséquence importante de la constance de c dans tout référentiel inertiel : deux événements simultanés dans un référentiel ne le sont plus dans un autre, en mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier.

Relativité des longueurs

On appelle *longueur propre* une longueur mesurée dans le référentiel où l'objet est au repos (le *référentiel propre*). Cette longueur est mesurée à l'aide d'une règle au repos par rapport à l'objet.

Si l'objet, au repos dans un référentiel d'inertie (\mathcal{R}'), est en mouvement par rapport à un autre référentiel d'inertie (\mathcal{R}), pour procéder à sa mesure dans (\mathcal{R}), il faut repérer de manière simultanée les coordonnées des extrémités dans (\mathcal{R}) puis effectuer la mesure à l'aide d'une règle au repos dans (\mathcal{R}). Comme la simultanéité est perdue lors du changement de référentiel, on voit que les mesures des longueurs sont également relatives.

2.2 Transformation spéciale de Lorentz

Le 2^e postulat est en contradiction avec la loi de composition classique des vitesses, donc avec la transformation de Galilée qui permet de passer d'un référentiel à un autre (§ 1.1.3).

Un événement sera caractérisé dans un référentiel d'inertie par la donnée d'une coordonnée de temps et de trois coordonnées d'espace. Si on considère deux référentiels d'inertie (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}'), le même événement sera caractérisé dans (\mathcal{R}) par (t, x, y, z) et dans (\mathcal{R}') par (t', x', y', z') .

Pour construire la relativité, on doit donner une alternative à la transformation de Galilée (1.2) pour trouver les coordonnées (t', x', y', z') d'un événement dans un référentiel d'inertie sachant qu'on connaît ses coordonnées (t, x, y, z) dans un autre référentiel d'inertie.

On a alors des relations linéaires entre les coordonnées d'un même événement exprimées dans (\mathcal{R}) et dans (\mathcal{R}'). En supposant en outre qu'on synchronise les horloges de (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') à l'instant $t = t' = 0$ lorsque les positions O et O' coïncident, on aura :

$$\begin{cases} t' &= a_1 x + a_2 t \\ x' &= a_3 x + a_4 t \end{cases}$$

Les coordonnées de l'origine O' sont reliées dans (\mathcal{R}) par $0 = a_3 x + a_4 t$ qui est donc animé d'un mouvement de vitesse uniforme u donnée par :

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = -u a_3$$

L'invariance de la vitesse de la lumière le long de Ox (ou de $O'x'$) s'écrit :

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{a_3 dx + a_4 dt}{a_1 dx + a_2 dt} = \frac{a_3 c + a_4}{a_1 c + a_2} \Rightarrow a_1 c^2 + (a_2 - a_3) c - a_4 = 0$$

L'isotropie de l'espace montre qu'un signal lumineux se propageant dans le sens négatif selon Ox se déplace à la vitesse $-c$, soit :

$$-c = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{a_3 dx + a_4 dt}{a_1 dx + a_2 dt} = \frac{-a_3 c + a_4}{-a_1 c + a_2} \Rightarrow a_1 c^2 - (a_2 - a_3) c - a_4 = 0$$

La différence entre ces deux dernières équations entraîne que $a_3 = a_2$, d'où $a_1 = a_4/c^2 = -u/c^2 \times a_3$.

Finalement, la transformation recherchée s'écrit :

$$\begin{cases} t' = a_3 \left(t - \frac{u}{c^2} x \right) \\ x' = a_3 (x - ut) \end{cases} \quad \text{et encore} \quad \begin{cases} t = a_3 \left(t' + \frac{u}{c^2} x' \right) \\ x = a_3 (x' + ut') \end{cases}$$

où la 2^e transformation est obtenue en changeant u en $-u$ pour obtenir l'expression des coordonnées d'un événement dans (\mathcal{R}) en fonction des coordonnées de ce même événement dans (\mathcal{R}') . On voit également que $a_3 > 0$ pour respecter la flèche du temps.

En injectant les expressions de x' et t' dans celle de x , on obtient :

$$\begin{cases} x = a_3 \left[a_3 (x - ut) + u a_3 \left(t - \frac{u}{c^2} x \right) \right] \\ = a_3 \left[a_3 x + u a_3 \frac{u}{c^2} x \right] = a_3 x \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \end{cases}$$

d'où finalement :

$$1 = a_3^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)$$

On en déduit que :

$$\frac{u}{c} < 1 \quad \text{et} \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Finalement, la transformation recherchée s'écrit :

$$\begin{cases} t' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(t - \frac{u}{c^2} x \right) \\ x' = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} (x - ut) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \frac{u}{c} < 1$$

2.2.1 La transformation de Lorentz

On peut également montrer de plusieurs façons² que la transformation recherchée est la transformation de **Lorentz** énoncée dans ce paragraphe, même si historiquement elle a été introduite³ en 1904, antérieurement aux travaux d'**Einstein**, pour satisfaire mathématiquement à l'invariance des équations de **Maxwell**

2. On trouvera par exemple dans [3, pages 18 à 23] une méthode basée sur l'utilisation des symétries et de la linéarité de la transformation. On trouvera dans [2, pages 31 à 33] une esquisse de démonstration à l'aide du formalisme de **Minkowski** (§ 3.3.1). Finalement, on trouvera dans [7, page 163] une démonstration "à la main".

3. Cette transformation est le fruit d'un long processus puisque **Larmor**, **Lorentz** puis **Poincaré** l'ont formulée mathématiquement, tandis que sa signification physique a été donnée par **Einstein** en 1905.

par changement de référentiel d'inertie. Noter qu'une démonstration rigoureuse nécessiterait une utilisation extensive de la théorie des groupes.

On considère deux référentiels d'inertie (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') , où (\mathcal{R}') se déplace par rapport à (\mathcal{R}) à la vitesse $\vec{u} = u \vec{u}_x$ suivant l'axe Ox . On suppose qu'en $t = t' = 0$, les origines O et O' des deux repères sont confondues.

On appellera *transformation de Lorentz* (ou parfois *transformation de Lorentz-Poincaré*), une transformation qui reliera les coordonnées spatio-temporelles d'un événement dans ces deux référentiels selon la forme :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma_u (ct - \beta_u x) \\ x' &= \gamma_u (x - \beta_u ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta_u = \frac{u}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_u^2}} \quad (2.1)$$

où le facteur $\gamma_u > 1$ est le *facteur de Lorentz*.

La transformation inverse, correspondant au passage du référentiel (\mathcal{R}') au référentiel (\mathcal{R}) , animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $-\vec{u}$ par rapport à (\mathcal{R}') , est donnée par :

$$\begin{cases} ct &= \gamma_u (ct' + \beta_u x') \\ x &= \gamma_u (x' + \beta_u ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases} \quad (2.2)$$

et correspond à l'inversion du signe de la vitesse \vec{u} dans (2.1).

Remarque 1 : On déduit immédiatement des relations de définition que :

$$\beta_u = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma_u^2}} \quad \text{et} \quad \gamma_u^2 \beta_u^2 = \gamma_u^2 - 1 \quad (2.3)$$

Remarque 2 : Les longueurs et les temps sont mesurés avec la même dimension par l'utilisation de c . Ce n'est pas une pratique exclusive de la relativité restreinte. On peut mesurer une distance avec un temps (par exemple, en astronomie, on mesure les distances en *années-lumière*) ou mesurer un temps à l'aide d'une distance (par exemple, quand on dit *j'habite à 10' du Bâtiment h*, cela signifie que la distance est telle qu'avec une vitesse normale, on met 10' pour venir).

Remarque 3 : De part sa nature, la transformation de Lorentz est évidemment linéaire. C'est pour cela qu'on peut passer du référentiel en mouvement (\mathcal{R}') au référentiel au repos (\mathcal{R}) en changeant \vec{u} en $-\vec{u}$. Ceci implique qu'il est impossible de hiérarchiser (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') , c'est-à-dire que les deux référentiel (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') (et par suite tous les référentiels d'inertie) sont physiquement équivalents.

Remarque 4 : La transformation de Lorentz utilisée ici est en fait la *transformation spéciale de Lorentz* (ou *boost de Lorentz*) qui regroupe les changements de référentiels dans la direction Ox pour lesquels les origines O et O' sont confondues à l'origine des temps (lorsque $t = t' = 0$).

2.2.2 Autres écritures de la transformation de Lorentz

Écriture hyperbolique

On exprime parfois la transformation de Lorentz à l'aide de la *rapacité* α définie par :

$$\beta_u = \text{th}(\alpha) \quad \text{ou} \quad \alpha = \text{ath}(\beta_u) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta_u}{1 - \beta_u} \right) \quad (2.4)$$

où th est la tangente hyperbolique. Le facteur γ_u s'écrit alors :

$$\gamma_u = (1 - \beta_u^2)^{-1/2} = \left[1 - \left(\frac{\exp(\alpha) - \exp(-\alpha)}{\exp(\alpha) + \exp(-\alpha)} \right)^2 \right]^{-1/2} = \text{ch}(\alpha)$$

puisque $1 - \text{th}^2(\alpha) = 1/\text{ch}^2(\alpha)$. On a également $\gamma_u \beta_u = \text{sh}(\alpha)$.

On peut écrire (2.1) sous la forme d'une *rotation hyperbolique* :

$$\begin{cases} ct &= ct' \text{sh}(\alpha) + x' \text{ch}(\alpha) \\ \vec{r} &= x' \text{ch}(\alpha) + ct' \text{sh}(\alpha) \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(\alpha) & \text{sh}(\alpha) \\ \text{sh}(\alpha) & \text{ch}(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Avec cette notation, le changement de référentiel inverse consiste à remplacer β_u en $-\beta_u$, c'est-à-dire à inverser le signe de $\text{sh}(\alpha)$, en conservant $\gamma_u = \text{ch}(\alpha)$ inchangé.

Ecriture matricielle

La transformation de **Lorentz** pour passer de $(\bar{\mathcal{R}})$ à (\mathcal{R}') peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = (\Lambda) \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad (\Lambda_{\nu}^{\mu}) = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u \gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta_u \gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

à l'aide de la *matrice de Lorentz* (Λ) . On vérifie bien que $(\Lambda)(\Lambda)^{-1} = I_4$ où I_4 représente la matrice identité de rang 4.

2.2.3 Limite classique de la transformation de Lorentz

En ignorant les coordonnées passives y et z , les transformations de Galilée et de **Lorentz** s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} t' &= t \\ x' &= x - ut \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} ct' &= \gamma_u (ct - \beta_u x) \\ x' &= \gamma_u (x - \beta_u ct) \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $\beta_u = u/c$ et $\gamma_u = 1/\sqrt{1 - \beta_u^2}$. Un développement au 2^e ordre en u/c permet d'écrire :

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \approx 1 + \frac{u^2}{2c^2} + O(u^4/c^4)$$

c'est-à-dire que la transformation de **Lorentz** devient :

$$\begin{cases} ct' &\approx -\frac{u}{c}x + \left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)ct \\ x' &\approx \left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right)x - ut \end{cases} \quad (2.8)$$

La 2^e de ces deux relations se ramène à la transformation de Galilée si u^2/c^2 est suffisamment petit. En négligeant les termes du 2^e ordre en u/c , la 1^{re} relation de (2.8) devient :

$$ct' \approx -\frac{u}{c}x + ct$$

Cette relation n'est pas la transformation de Galilée. Cependant, pour des distances et des longueurs usuelles, le terme ux/c est négligeable et on retrouve $t' = t$. A la limite classique ($c \rightarrow \infty$), on retrouve bien que la transformation de **Lorentz** restitue la transformation de Galilée.

2.2.4 Limitations de la relativité restreinte

La limitation à la relativité restreinte est due au fait qu'elle ne prend en compte que les référentiels d'inertie et surtout qu'elle ne peut pas incorporer la gravitation.

Pour les référentiels d'inertie, on peut toujours s'arranger en utilisant des référentiels très proches les uns des autres⁴.

Par contre, la gravitation ne peut pas être traitée en relativité restreinte. En 1859, **Le Verrier** montrait que le périhélie de Mercure tournait plus vite de 43" par siècle que ne le prédisait la théorie⁵. En introduisant la relativité générale en 1915, **Einstein** a donné une explication à cette avance anormale du périhélie, qu'aucune théorie classique ne parvenait à expliquer. Ceci reste un des plus grands succès de la relativité générale⁶.

2.3 Premières conséquences

On détaille dans ce paragraphe quelques premières conséquences surprenantes et non intuitives de la transformation de **Lorentz**.

2.3.1 Retour sur la simultanéité

Au contraire de ce qui se passe en mécanique galiléenne, d'après (2.1), deux événements (1) et (2) simultanés dans (\mathcal{R}) ne le seront plus dans (\mathcal{R}'). En effet, on peut écrire :

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma_u [c(t_2 - t_1) - \beta_u(x_2 - x_1)] = -\gamma_u \beta_u(x_2 - x_1) \neq 0 \text{ généralement}$$

On voit donc pourquoi en relativité, deux événements simultanés dans un référentiel ne le sont plus dans un autre référentiel (Figure 2.3). Cette propriété est clivante avec la mécanique newtonienne pour laquelle on considère que c est grand devant toute autre vitesse, c'est-à-dire que dans tous les cas $\beta_u \approx 0$ donc $t'_2 \approx t'_1$.

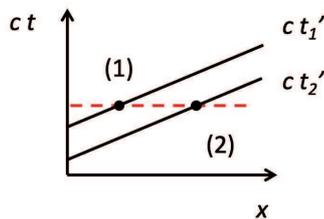


FIGURE 2.3 – Deux événements simultanés (1) et (2) dans (\mathcal{R}) ne le sont plus dans (\mathcal{R}'). On a ici $t'_1 > t'_2$.

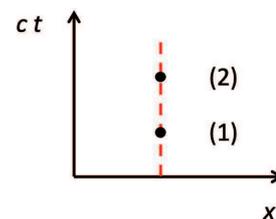


FIGURE 2.4 – Représentation de deux événements (1) et (2) situés au même endroit dans (\mathcal{R}).

On généralise ceci pour obtenir deux propriétés très importantes :

1. Deux événements simultanés dans un référentiel ne le sont plus dans un 2^e référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport au 1^{er}.
2. Il n'existe pas de temps absolu et l'écoulement du temps dépend du mouvement de l'observateur.

Remarque : Attention à bien noter⁷ que le fait que deux événements soient simultanés ne signifie pas que les deux événements sont vus au même instant par un observateur fixe dans le référentiel considéré puisqu'un observateur verra d'abord l'événement qui est le plus proche de lui (à cause du temps de propagation du signal lumineux). En parlant de simultanéité, on suppose implicitement la présence de deux horloges fixes qui mesurent l'écoulement du temps. Ces horloges sont synchrones, ce qui permet de définir un temps global associé à ce référentiel. La synchronisation des horloges s'effectue grâce à l'échange de signaux lumineux puisqu'un signal envoyé à $t = 0$ sera reçu par une horloge située à une distance d au temps d/c .

4. Pensez au mouvement des particules chargées dans un accélérateur circulaire qui se traite toujours en relativité restreinte.

5. L'orbite de Mercure est une ellipse qui tourne lentement et le *périhélie* est le point de l'orbite d'une planète le plus proche du Soleil.

6. Pour une première approche de la relativité générale "avec les mains", voir [6, chapitre 10] ou [7, pages 91 à 160].

7. Cette partie est reprise de [10].

2.3.2 Dilatation des intervalles de temps

On considère deux événements (1) et (2) distincts dans (\mathcal{R}) qui se produisent au même endroit à des instants différents. On a donc dans (\mathcal{R}) :

$$t_2 - t_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad x_2 - x_1 = 0$$

En passant dans (\mathcal{R}') , on obtient $c(t'_2 - t'_1) = \gamma_u [c(t_2 - t_1) - \beta_u (x_2 - x_1)] = \gamma_u c(t_2 - t_1)$ soit :

$$\Delta t' = \gamma_u \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' > \Delta t$$

L'intervalle de temps entre deux événements mesuré dans un référentiel quelconque est toujours supérieur à l'intervalle de temps mesuré dans le référentiel où les deux événements sont à la même position. De manière équivalente, on peut dire que l'intervalle de temps mesuré dans n'importe quel référentiel sera supérieur à l'intervalle de temps mesuré dans le référentiel où l'horloge est au repos. On parle de *dilatation des intervalles de temps*.

Remarque : On entend parfois parler de *dilatation des temps*. C'est une expression dangereuse à laquelle il faut faire attention : on doit plutôt parler de *dilatation des intervalles de temps*.

2.3.3 Contraction des longueurs

On considère cette fois deux événements (1) et (2) distincts dans (\mathcal{R}) qui se produisent au même instant à des positions différentes.

Mesure d'une longueur

On considère une règle, immobile dans le référentiel (\mathcal{R}) de l'observateur. Pour simplifier, on fixe l'axe Ox parallèle à la règle. On note x_1 et x_2 les deux extrémités de la règle. Dans (\mathcal{R}) , la longueur de la règle est définie par :

$$L = \Delta x = x_2 - x_1$$

C'est par définition sa *longueur propre*, longueur évaluée dans son référentiel propre - ici (\mathcal{R}) . Cette même longueur évaluée dans un autre référentiel d'inertie, en mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier, sera une *longueur impropre*.

On considère un 2^e observateur, lié à un référentiel (\mathcal{R}') en mouvement à la vitesse \vec{u} orientée selon Ox par rapport à (\mathcal{R}) . Les deux extrémités de la règle sont animées d'un mouvement rectiligne uniforme. On définit la longueur de la règle pour ce 2^e observateur par la distance entre les deux extrémités de la règle, évaluée au même instant t' dans (\mathcal{R}') :

$$L' = \Delta x' = x'_2(t') - x'_1(t')$$

Comme la règle est solide, ses deux extrémités ont la même vitesse. Le résultat ne dépend donc pas de l'instant t' où la mesure est effectuée.

Contraction

La longueur d'un objet dépend du référentiel dans lequel on fait la mesure. Cette longueur, mesurée dans un référentiel quelconque, sera toujours inférieure à la longueur mesurée dans le référentiel où l'objet est au repos. C'est le phénomène de *contraction des longueurs*.

$$L' = \frac{L}{\gamma_u} \quad \Rightarrow \quad L' < L \tag{2.9}$$

On en déduit qu'une longueur L' mesurée dans la direction du mouvement dans n'importe quel référentiel sera toujours inférieure à la longueur L mesurée dans le référentiel où l'objet est au repos.

2.3.4 Paradoxe des jumeaux

Le *paradoxe des jumeaux* a été introduit par **Langevin** en 1911 pour expliquer le concept de *dilatation des intervalles de temps*. On considère deux jumeaux au repos sur la Terre. L'un d'eux (Arthur avec un 'A' comme 'Astronaute') part faire un voyage en fusée à grande vitesse, tandis que l'autre (Eugène avec un 'E' comme 'Earth') reste sur Terre.

On considère deux fusées (Figure 2.5), l'une s'éloignant de la Terre à la vitesse u , l'autre s'en rapprochant à la vitesse u . Arthur emporte une horloge avec lui et quitte la Terre en sautant sur la 1^{re} fusée, saute avec son horloge sur la 2^e fusée au plus loin de son exploration spatiale et enfin saute (encore avec son horloge sous le bras) de la 2^e fusée vers la Terre pour revenir voir son frère à son point de départ. L'horloge d'Arthur indique alors T_A , tandis que celle d'Eugène, resté sur Terre, indique T_E .

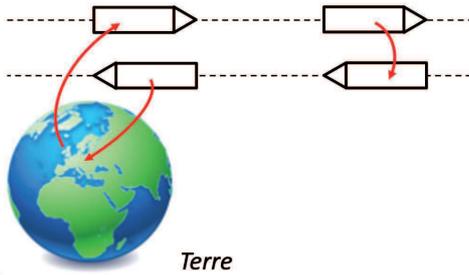


FIGURE 2.5 – Lors de ce voyage en fusée, Arthur saute sur une 1^{re} fusée, change de fusée et revient sur la Terre à la fin du périple, tandis qu'Eugène reste sur la Terre.

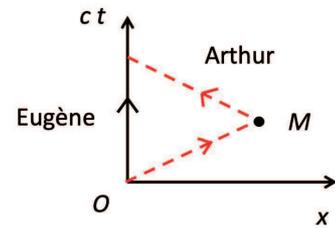


FIGURE 2.6 – Trajectoires d'Eugène et d'Arthur dans le diagramme d'espace-temps.

En physique classique, on a bien sûr $T_A = T_E$.

En utilisant la relativité, Arthur et Eugène ont a priori chacun des points de vue différents :

- Pour Eugène, si la durée totale du voyage est T_E , l'aller prend $T_E/2$ et le retour $T_E/2$.
- Pour Arthur, la durée du voyage aller est un temps propre car les deux événements (départ et saut de la 1^{re} fusée vers la 2^e) se font au même endroit dans son référentiel (\mathcal{R}') (la fusée). Le temps entre ces deux événements est mesuré en temps impropre par Eugène resté sur Terre (et vaut $T_E/2$). La dilatation des intervalles de temps nous dit que pour Arthur, ce temps vaut $T'_A = T_E/(2\gamma)$ (où $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$).

Pour les mêmes raisons, le trajet retour par Arthur dans (\mathcal{R}'') dure également $T''_A = T_E/(2\gamma)$.

Finalement, Arthur a voyagé avec son horloge pendant le temps $T_A = T'_A + T''_A = T_E/\gamma$. Arthur revient de son voyage "plus jeune" qu'Eugène. Pour des fusées se déplaçant à la vitesse $\beta = 0,8 c$, si Eugène mesure $T_E = 10$ ans avec son horloge, celle d'Arthur indiquera $10 \times \sqrt{1 - 0,8^2} = 6$ ans à son retour.

Le paradoxe apparaît quand on inverse le raisonnement : Arthur voit Eugène resté sur Terre s'éloigner à la vitesse $-\vec{u}$ par rapport à lui, puis se rapprocher à la vitesse $+\vec{u}$. En faisant le même raisonnement, Arthur va penser qu'Eugène sera plus jeune que lui lorsqu'ils se reverront.

Pour lever le paradoxe, on doit remarquer que le problème n'est pas le même pour Arthur et pour Eugène. Eugène est toujours resté dans un référentiel d'inertie et Arthur aura subi une phase d'accélération au départ, de décélération-retournement-accélération à mi-parcours et de décélération à la fin. L'accélération et la décélération sont des phénomènes qui ne sont pas symétriques. Le référentiel de l'horloge transportée par Arthur n'est pas un référentiel d'inertie. On considère néanmoins que c'est le 1^{er} raisonnement qui s'applique et qu'Arthur est plus jeune qu'Eugène après son périple.

2.3.5 Loi de transformation des vitesses

L'établissement des formules de transformation des vitesses \vec{v} et \vec{v}' d'une particule dans les référentiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') demande quelques calculs mais ne pose pas de difficultés particulières.

On part de :

$$\begin{cases} ct' = \gamma_u (ct - \beta_u x) \\ x' = \gamma_u (x - \beta_u ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \beta_u = \frac{u}{c} \quad \text{et} \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_u^2}} \quad (2.10)$$

On obtient :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - u v_x / c^2} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_u (1 - u v_x / c^2)} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma_u (1 - u v_x / c^2)} \quad (2.11)$$

On trouve bien une relation différente de la forme classique (1.3) !

Il sera souvent utile de séparer les deux composantes de la vitesse parallèlement et orthogonalement à la direction définie par \vec{u} en posant $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$. Les formules de transformation s'écrivent alors :

$$\vec{v}'_{\parallel} = \frac{\vec{v}_{\parallel} - \vec{u}}{1 - \vec{u} \cdot \vec{v} / c^2} \quad \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\gamma_u (1 - \vec{u} \cdot \vec{v} / c^2)} \quad (2.12)$$

Comme pour la transformation de **Lorentz**, on obtient les formules de transformation inverse en changeant \vec{u} en $-\vec{u}$, soit :

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + u v'_x / c^2} \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma_u (1 + u v'_x / c^2)} \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma_u (1 + u v'_x / c^2)} \quad (2.13)$$

ou encore :

$$\vec{v}'_{\parallel} = \frac{\vec{v}_{\parallel} + \vec{u}}{1 + \vec{u} \cdot \vec{v} / c^2} \quad \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\gamma_u (1 + \vec{u} \cdot \vec{v} / c^2)} \quad (2.14)$$

Remarque 1 : On retrouve bien la cinématique newtonnienne dans l'approximation classique ($c \rightarrow \infty$) puisque (2.11) donne alors $\vec{v}' \approx \vec{v} - \vec{u}$. Par contre, pour des valeurs de u proches de c , l'écart par rapport au traitement classique est important (Figure 2.7).

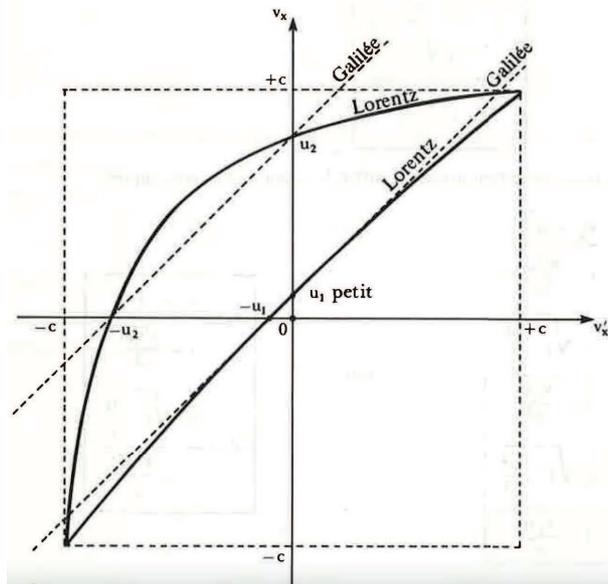


FIGURE 2.7 – Variation de v_x en fonction de v'_x pour deux valeurs de u , l'une (u_1) petite devant c , l'autre (u_2) proche de c (Figure extraite de [2, page 46]).

Remarque 2 : Les composantes de la vitesse \vec{v} orthogonale à la vitesse d'entraînement \vec{u} sont modifiées lors d'un changement de référentiel, au contraire des coordonnées transverses qui restent inchangées.

Remarque 3 : On remarque que si $v'_x = c$, alors la vitesse dans le référentiel (\mathcal{R}) s'écrit, pour toute vitesse d'entraînement \vec{u} :

$$v_x = \frac{c + u}{1 + u/c} = c \quad (2.15)$$

ce qui est bien conforme au 2^e postulat (c'est normal, la transformation de **Lorentz** a été établie pour rendre c invariante).

2.3.6 Loi de transformation des accélérations (*)

De la même manière que pour la transformation des vitesses, on peut obtenir les formules de transformation des accélérations.

On obtient finalement :

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma_u^3 (1 + u v'_x/c^2)^3} \quad a_y = \frac{a'_y + u/c^2 \times (v'_x a'_y - v'_y a'_x)}{\gamma_u^2 (1 + u v'_x/c^2)^3} \quad a_z = \frac{a'_z + u/c^2 \times (v'_x a'_z - v'_z a'_x)}{\gamma_u^2 (1 + u v'_x/c^2)^3} \quad (2.16)$$

où $\gamma_u = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$.

En remarquant que :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}' \times \vec{a}' = \begin{pmatrix} v'_y a'_z - v'_z a'_y \\ v'_z a'_x - v'_x a'_z \\ v'_x a'_y - v'_y a'_x \end{pmatrix}$$

on écrit encore, en décomposant l'accélération \vec{a} en deux parties parallèle ($\vec{a}_{||}$) et orthogonale (\vec{a}_{\perp}) à la direction définie par \vec{u} :

$$\vec{a}_{||} = \frac{\vec{a}'_{||}}{\gamma_u^3 (1 + \vec{u} \cdot \vec{v}'/c^2)^3} \quad \vec{a}_{\perp} = \frac{\vec{a}'_{\perp} - \vec{u}/c^2 \times (\vec{v}' \times \vec{a}')}{\gamma_u^2 (1 + \vec{u} \cdot \vec{v}'/c^2)^3} \quad (2.17)$$

Remarque 1 : Comme précédemment, on obtient les formules de transformation inverses en changeant \vec{u} en $-\vec{u}$.

Remarque 2 : Ces résultats ne sont pas très "parlant" de prime abord. On peut simplement remarquer qu'au contraire de la mécanique galiléenne (1.3), on a $\vec{a} \neq \vec{a}'$, c'est-à-dire qu'en relativité, les accélérations ne se conservent pas lors d'un changement de référentiel d'inertie.

2.4 Vérifications expérimentales du 2^e postulat

On évoque dans ce paragraphe deux expériences que l'on cite couramment comme *preuve* du 2^e postulat. Il faut toutefois rappeler que lorsque **Einstein** a énoncé le 2^e postulat, il n'en existait aucune preuve expérimentale. C'était une pure nécessité logique pour palier aux difficultés rencontrées avec la notion d'éther. La principale *preuve* des postulats de la relativité vient surtout des vérifications expérimentales indirectes venant des conséquences logiques qui en découlent.

2.4.1 Lignes spectrales émises par des atomes en mouvement

La première observation d'un effet lié à la dilatation des intervalles de temps a été l'expérience d'**Ives** et **Stilwell** en 1938 qui mesurèrent un changement de fréquence des lignes spectrales émises par des atomes en mouvement rapide. L'effet restait néanmoins très faible car la vitesse des atomes était de l'ordre de 0,5% de la vitesse de la lumière. Cette expérience sera détaillée lors de l'étude de l'effet **Doppler** (§ 4.2.1).

2.4.2 Etude des muons du rayonnement cosmique

Des effets plus importants sont mis en évidence dans l'étude des muons du rayonnement cosmique. Ces effets ont été mis en évidence pour la première fois par **Rossi** et **Hall**⁸ en 1941. On cite plutôt souvent une version simplifiée de cette expérience, réalisée en 1963 par **Frisch** et **Smith**⁹. Les muons sont les particules les plus nombreuses dans le rayonnement cosmique à haute altitude. Ils voyagent pour la plupart vers le sol à des vitesses proches de celle de la lumière.

Les muons ont certaines caractéristiques identiques à celles des électrons (même charge $\pm e$, même spin $1/2$) mais une masse bien supérieure ($m_\mu \approx 206,7 m_e$) et surtout ce sont des particules instables dont les modes de désintégration sont :

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad \text{et} \quad \mu^+ \longrightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

où ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ et $\bar{\nu}_\mu$ sont les *neutrinos* et *antineutrinos électroniques* et *muoniques*.

La *durée de vie* τ^* des muons (et de manière plus générale de toutes les particules instables) a un sens statistique : un muon à l'instant t^* dans le repère où il est au repos a la probabilité dt^*/τ^* de se désintégrer entre t^* et $t^* + dt^*$. Le nombre N^* de muons dans l'échantillon entre les instants t^* et $t^* + dt^*$ vérifie :

$$N(t^*) = N_0 \exp(-t^*/\tau^*) \quad (2.18)$$

La décroissance est donc une exponentielle et τ^* représente la constante de temps caractéristique. L'astérisque '*' signifie que les temps sont évalués dans le référentiel où les muons sont immobiles.

Un groupe de muons peut ainsi servir d'horloge et être utilisé pour mesurer des intervalles de temps très courts : si 1000 muons sont présents lors d'un événement (1) et qu'il n'en reste que $1000/e = 368$ à l'instant où se produit un événement (2), il s'est écoulé τ^* entre les deux événements.

L'expérience de **Frisch** et **Smith** consiste à mesurer le temps mis par les muons pour parcourir une distance $h \approx 2$ km. Pour cela, un compteur a d'abord été installé à 1910 m au dessus du niveau de la mer.

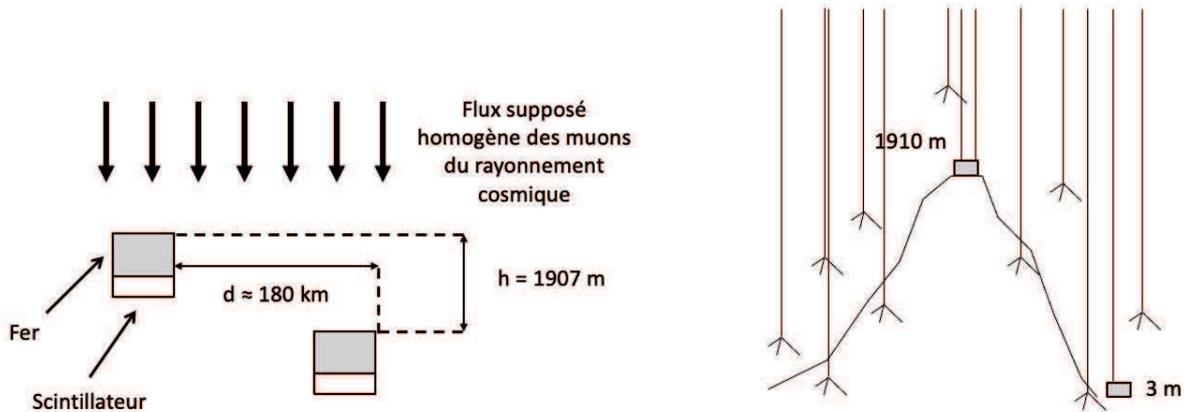


FIGURE 2.8 – Schéma de l'expérience de **Frisch** et **Smith**. Le fer présent au dessus du scintillateur (à gauche) permet de ne retenir que les muons ayant une vitesse de $(99,52\% \pm 0,02\%)c$. L'appareillage est disposé successivement en altitude puis au niveau de la mer. Voir le texte pour plus de détails.

Le système de détection est un scintillateur de quelques centimètres précédé de 75 cm de fer (Figure 2.8) qui sert à sélectionner les muons dont la vitesse est $v = (0,9952 \pm 0,0002)c$, soit $\gamma \approx 10$.

S'il n'est pas arrêté par le fer, l'arrivée d'un muon dans le scintillateur se traduit par un petit signal lumineux. Ce muon a toutes les chances de se désintégrer dans les quelques microsecondes suivantes en un électron ou un positron qui génèrent également un signal lumineux au bout d'un temps Δt . L'étude statistique de ces Δt permet de vérifier la loi de décroissance exponentielle (2.18) et d'en déduire que $\tau^* \approx 2,2 \mu s$ (Figure 2.9).

8. D. Rossi et D.B. Hall, *Variation of the Rate of Decay of Mesotrons with Momentum*, Phys. Rev. **59**, 223-228 (1941).

9. D.H. Frisch et J.H. Smith, *Measurement of the Relativistic Time Dilation Using μ -Mesons*, Am. J. Phys. **31**, 342 (1963). Un film d'époque très pédagogique retrace cette expérience (<https://www.youtube.com/watch?v=rbzt8gDSYIM>) dans lequel les muons sont appelés *mu-mesons*.

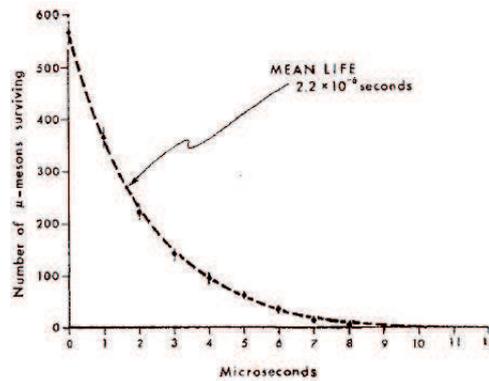


FIGURE 2.9 – Temps de décroissance des muons de l'échantillon (Figure extraite du papier original de **Frisch** et **Smith**).

Ce compteur a détecté $n_1 = 563 \pm 10$ muons par heure. Quand l'appareillage fut descendu à 3 m au dessus du niveau de la mer¹⁰, il n'a plus enregistré que $n_2 = 408 \pm 9$ muons par heure. Ce n'était pas les mêmes muons dont on enregistrerait le passage dans les deux positions du compteur, mais le flux de rayons cosmiques ne varie pas d'un instant à un autre et d'un endroit à un autre, du moins pas sur la distance séparant les deux positions de l'appareil. Les résultats sont donc identiques à ceux qu'on aurait obtenus en chronométrant un seul groupe de muons.

Si on ne tient pas compte de la relativité, on s'attend à trouver dans le 2^e compteur :

$$n_2 = n_1 \exp(-t/\tau^*) \quad \text{avec} \quad t = h/v \approx 6,4 \mu\text{s} \quad \text{soit} \quad n_2 \approx 31 \text{ muons par heure}$$

Par contre, en considérant que dans le référentiel des muons la distance entre les deux compteurs apparaît γ fois plus courte, l'intervalle de temps séparant les deux événements est simplement :

$$t^* = h/(\gamma v) \approx 0,64 \mu\text{s} \quad \text{soit} \quad n_2 = n_1 \exp(-t^*/\tau^*) \approx 420 \text{ muons par heure}$$

Cet exemple est considéré comme une des premières vérifications expérimentales frappantes de la contraction des longueurs.

Remarque : Dans le référentiel lié aux compteurs, la durée de vie des muons est γ fois plus importante que dans leur référentiel propre, ce qui redonne le même expression de n_2 . C'est pourquoi cette expérience est aussi considérée comme une application de la dilatation des intervalles de temps.

2.5 Autres vérifications expérimentales (*)

On évoque dans ce paragraphe d'autres expériences classiquement mises en avant comme *preuve* de la relativité. La 1^{re} est sujette à caution, tandis que les autres sortent du cadre de ce qui est exigible en L3 (recours à la relativité générale, à la physique des particules, etc..). Il est bon de les connaître mais elles ne sont pas exigible pour l'examen.

2.5.1 Expérience de Fizeau

On présente dans plusieurs ouvrages (par exemple [2, page 46] ou [7, page 44]) l'expérience de **Fizeau** comme une application et/ou conséquence de la loi de transformation relativiste des vitesses. Ceci est discutable et est loin d'être évident. L'interprétation relativiste de cette expérience est due à **Einstein** lui-même, mais il la trouvait tellement peu convaincante qu'il ne l'a jamais présentée comme une *preuve* de la relativité¹¹.

10. La mesure à haute altitude a été effectuée au sommet du Mont Washington, dans le New Hampshire, et celle à basse altitude à Cambridge, dans la banlieue de Boston. Ces deux points sont espacés de près de 180 km, mais cela n'a pas d'importance si on suppose (et c'est très raisonnable) une uniformité du flux des muons cosmiques.

11. Elle n'est donc pas conseillée à l'Agrégation et est juste donnée ici pour que son côté obscur apparaisse clairement...

L'interprétation relativiste repose sur la transformation des vitesses qui permet de modifier (1.12) selon :

$$v_+ = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2} \quad \text{ou} \quad v_- = \frac{v' - u}{1 - v'u/c^2} \quad (2.19)$$

On a alors au 1^{er} ordre en u/c :

$$v_x = \frac{c/n + u}{1 + u/(nc)} \approx \left(\frac{c}{n} + u\right) \left(1 - \frac{u}{nc} + \dots\right) \quad \text{et} \quad v_x \approx \left(\frac{c}{n} - u\right) \left(1 + \frac{u}{nc} + \dots\right)$$

Finalement :

$$v_+ \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u \quad \text{et} \quad v_- \approx \frac{c}{n} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u \quad (2.20)$$

On retrouve bien le facteur k introduit par **Fresnel** (§ 1.3.2), mais il n'a rien à voir avec la vitesse de déplacement de l'éther !

Remarque : Pour écrire (2.19), on a supposé que la vitesse de phase (c'est la vitesse qui nous intéresse ici) se transformait dans une transformation de **Lorentz** comme une vitesse, alors que généralement c'est la vitesse de groupe qui suit la loi de transformation des vitesses. On peut montrer que dans le cas particulier de l'expérience de **Fizeau**, la vitesse de phase suit la loi de transformation des vitesses¹².

2.5.2 Observation d'étoiles binaires

En 1913, **De Sitter** a proposé une expérience pour vérifier la constance de la vitesse de la lumière, basée sur l'observation des étoiles binaires¹³. La Figure 2.10 représente un tel système, avec deux étoiles tournant autour de leur centre d'inertie O . Un observateur sur Terre peut mesurer la vitesse à laquelle une des deux étoiles s'approche ou s'éloigne en mesurant la modification, due à l'effet **Doppler**, de la longueur d'onde de certaines lignes du spectre de la lumière de l'étoile¹⁴.

Plus qualitativement, on considère sur la Figure 2.10 celui des deux astres situé le plus loin du centre d'inertie. En A , il se rapproche de la Terre, ce qui provoque un déplacement vers le rouge. En B (diamétralement opposé), il s'en éloigne, provoquant un déplacement vers le bleu. On peut montrer (voir par exemple [5, page 9]) qu'en notant Ω le déplacement angulaire de l'étoile, R le rayon de son orbite et d la distance à la Terre, la fréquence ω_T reçue par l'observateur terrestre à l'instant t_T s'écrit au 1^{er} ordre :

$$\frac{\omega_T}{\omega_S} \approx 1 - \frac{\Omega R}{c} \sin\left(\Omega \tau - \frac{\Omega^2 R d}{c^2} \sin(\Omega \tau)\right) \quad \text{où} \quad \tau = t_T - \frac{d}{c}$$

en fonction de la fréquence ω_S de la source. Le terme $\Omega^2 R d/c^2 \sin(\Omega \tau)$ produit une déformation caractéristique de la sinusoïde et permet de mesurer la vitesse d'approche de l'étoile en fonction du temps. Si l'étoile est proche, la vitesse d'approche a l'allure de la sinusoïde non déformée de la Figure 2.11 (l'étoile est simplement périodiquement masquée par son partenaire). Par contre, si l'étoile est plus éloignée et que la vitesse de la lumière augmente quand l'étoile s'approche (et diminue lorsqu'elle s'éloigne), alors la lumière

12. Cette explication utilise le formalisme du quadrivecteur d'onde qui sera vu au § 4.1. Dans le cas particulier d'une onde se déplaçant par exemple dans la direction de \vec{u} pour laquelle on aura $k_x = k$ et $k_y = k_z = 0$, on peut écrire d'après (4.2) :

$$\begin{cases} \frac{\omega}{c} &= \gamma \left(\frac{\omega'}{c} + \beta k' \right) \\ k &= \gamma \left(k' + \beta \frac{\omega'}{c} \right) \end{cases}$$

La vitesse de phase s'écrira dans ce cas :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega' + u k'}{k' + \frac{u \omega'}{c^2}} = \frac{v'_\phi + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_\phi} \quad \text{puisque} \quad v'_\phi = \frac{\omega'}{k'}$$

La vitesse de phase suit bien la loi de composition des vitesses. Il en est de même pour une onde se propageant dans la direction $-\vec{u}$. On retrouve donc bien (2.19).

13. De Sitter, *On the constancy of the velocity of light*, Proc. Amsterdam Acad. **16**, 395 (1913).

14. Il n'est pas nécessaire que la Terre soit dans le plan des orbites. Si c'est le cas, le contraste sera simplement plus prononcé.

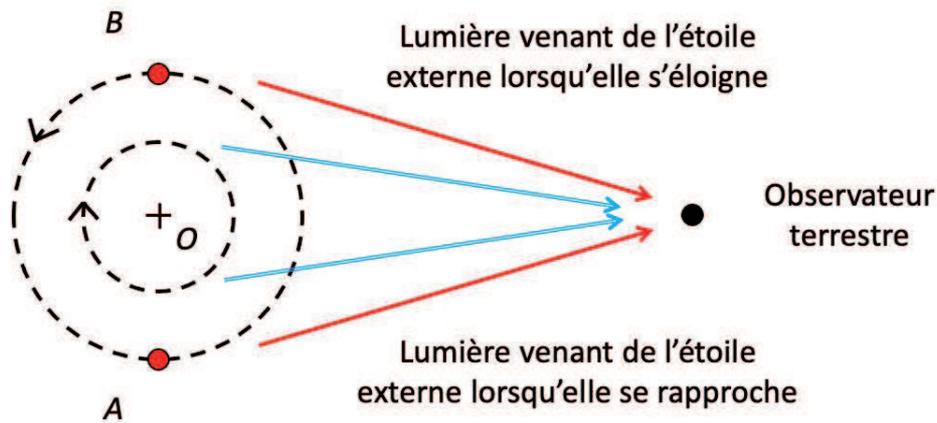


FIGURE 2.10 – Schéma d'une étoile double avec deux étoiles tournant autour de leur centre d'inertie.

émise par l'étoile lorsqu'elle s'approche de la Terre nous parviendrait plus tôt que celle émise lorsque l'étoile s'éloigne. La courbe correspondante serait donnée par les courbes modulées de la Figure 2.11. On peut tenir le même raisonnement pour l'étoile interne.

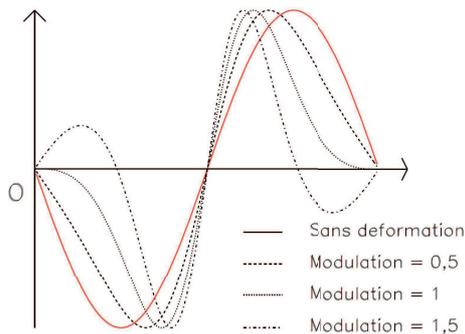


FIGURE 2.11 – Déformation schématique de la variation sinusoïdale de l'intensité lumineuse d'une étoile binaire reçue sur Terre en fonction du facteur de modulation $\Omega^2 R d/c^2$.

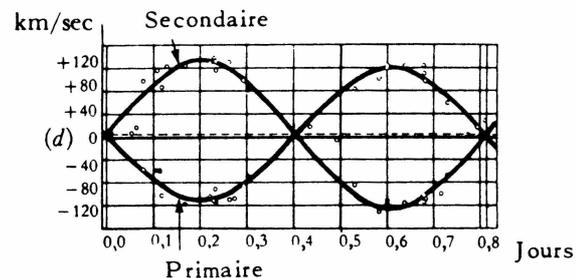


FIGURE 2.12 – Vitesse d'approche mesurée sur Castor C, pour les deux éléments du doublet. L'absence de distorsion de la sinusoïde montre que la vitesse de la lumière ne dépend pas de la vitesse relative de l'étoile (Figure extraite de [4, page 43]).

La Figure 2.12 représente une mesure sur l'étoile binaire Castor C. Les deux courbes représentent les vitesses d'approche des deux éléments du doublet, respectivement appelés ici *primaire* et *secondaire*. Il n'y a aucune distorsion apparente des courbes et on n'a jamais pu en mettre une en évidence sur aucune étoile binaire. L'absence de distorsion montre que la vitesse de la lumière ne dépend pas de la vitesse relative de l'étoile par rapport à l'observateur. La précision sur cette mesure est actuellement de 10^{-6} .

Remarque 1 : L'effet **Doppler** est une bonne méthode pour mesurer la vitesse de la source de lumière car il a été observé pour des sources terrestres dont on mesure la vitesse de manière indépendante. On utilise donc une calibration terrestre de l'effet **Doppler**.

Remarque 2 : L'objection principale à cette "preuve" est qu'on ne voit pas le rayonnement émis directement par l'étoile mais un rayonnement absorbé puis réémis par le nuage gazeux qui entoure l'étoile binaire.

2.5.3 Annihilation de positrons rapides

On cite également couramment l'annihilation de positrons rapides comme preuve du 2^e postulat de la relativité¹⁵. L'idée est que lorsqu'un positron de haute énergie (donc de vitesse proche de celle de la lumière), s'annihile avec un électron au repos suivant la réaction :



il arrive que l'un des deux photons émis soit dirigé vers l'avant et l'autre vers l'arrière. Dans l'expérience citée, le centre de masse du système e^+e^- se déplace à une vitesse proche de $c/2$, et deux photons sont émis. Pour une désintégration au repos, les deux photons sont émis avec un angle de 180° et leur vitesse est c . C'est également ce qu'on observe dans le référentiel du centre de masse. Pour une annihilation en vol, l'angle, mesuré dans le référentiel du laboratoire, est inférieur à 180° et dépend de l'énergie.

Si la vitesse des photons dépendait de la vitesse de leur source, celui qui va vers l'avant devrait aller plus vite que celui qui va vers l'arrière. En plaçant deux détecteurs à égale distance du point où l'annihilation se produit, le détecteur situé vers l'avant devrait détecter les photons avant le détecteur situé vers l'arrière. L'expérience ne montre pas de différence entre les temps d'arrivée des photons, ce qui indique qu'ils vont à la même vitesse.

Remarque : La principale objection à cette expérience est que la "source de lumière" est composée d'une particule en mouvement et d'une autre au repos, ce qui ne simplifie pas l'interprétation...

2.5.4 Vitesse de photons produits par la désintégration de π^0 en mouvement

Une 3^e preuve expérimentale (peut-être la plus directe) est basée sur la mesure de la vitesse de photons produits par la désintégration de π^0 en mouvement¹⁶ et ne présente plus l'inconvénient de l'expérience ci-dessus. Les π^0 sont produits auprès d'un accélérateur de particules sur une cible de berillium ('T' de la Figure 2.13) et se désintègrent en deux photons en environ 10^{-15} s. Dans cette expérience, on observe les photons émis par des π^0 se déplaçant à plus que 99,98% de la vitesse de la lumière, à un angle d'environ 6° par rapport à la direction de propagation des protons. Trois aimants ('M' et 'PM') proches de la cible servent à produire un faisceau totalement neutre en déviant toutes les particules chargées¹⁷.

La mesure du temps d'arrivée des photons se fait par rapport à la structure des paquets de protons de l'accélérateur, séparés de 105 ns les uns des autres.

Pour mesurer la vitesse des photons, deux positions différentes A et B du détecteur ont été utilisées. Les distributions de temps de vol obtenues (Figure 2.14) sont identiques¹⁸. La distance entre les positions A et B fournit la vitesse des photons¹⁹. On obtient $2,9977 \pm 0,0004 \cdot 10^8$ m/s, en excellent accord avec la vitesse de la lumière. La source a beau se déplacer à une vitesse proche de celle de la lumière, les photons émis vers l'avant ont une vitesse compatible avec c .

Remarque : On n'enregistre pas le passage des mêmes photons en A et en B , mais le flux de photons étant le même, les résultats sont identiques à ceux qu'on aurait obtenus en détectant les photons en A puis en B .

15. D. Sadeh, *Experimental evidence for the constancy of the velocity of gamma rays, using annihilation in flight*, Phys. Rev. Letters **10**, 271-273 (1963).

16. T. Alvåger, F. Farley, J. Kjellman et L. Walld, *Test of the second postulate of special relativity in the GeV region*, Phys. Letters **12**, 260-262 (1964).

17. Noter que sur la Figure 2.13, le bloc de béton (*concrete*), est muni d'un orifice cylindrique et joue le rôle d'un collimateur. La description de cette expérience se retrouve également dans [5, page 11].

18. La forme des courbes de la Figure 2.14 est due à la structure temporelle du paquet de protons dans l'accélérateur. Le point important est ici que cette forme soit identique en A et en B . Une 2^e mesure a été faite en déplaçant le détecteur en A' et B' (Figure 2.14). Les résultats obtenus sont compatibles aux attentes.

19. Expérimentalement, la distance entre A et B (31 m ou 105 ns) est choisie de façon à être égale à l'écart entre deux paquets dans l'accélérateur, pour permettre de déclencher en B sur le paquet suivant par rapport au déclenchement pour A . L'avantage de cette méthode est de minimiser les erreurs systématiques car le système d'acquisition utilise les mêmes voies (les pics correspondants aux enregistrements en A et B sont situés à la même abscisse sur la Figure 2.14).

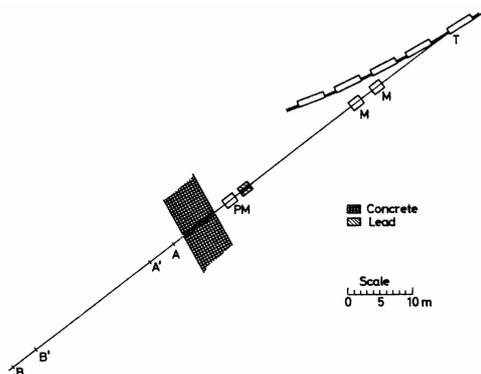


FIGURE 2.13 – Schéma de l'implantation des détecteurs (Figure extraite de la publication originelle d'Alvåger et al.).

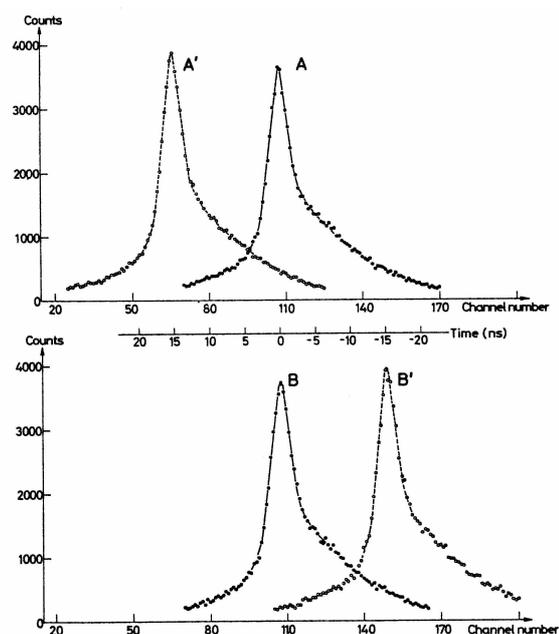


FIGURE 2.14 – Histogrammes de temps de vol des particules pour diverses positions du détecteur (Figure extraite de la publication originelle d'Alvåger et al.).

2.5.5 Etude d'horloges en mouvement

Une vérification moins ambitieuse qu'un vol interplanétaire à une vitesse proche de celle de la lumière (§ 2.3.4) a été effectuée en septembre 1971 à l'aide de quatre horloges atomiques au césium dont deux ont été embarquées dans des avions de ligne, et dont les indications ont été comparées à celles des deux autres horloges témoin restées au sol, après un tour du monde dans un sens ou dans l'autre à la même latitude²⁰.

Selon la relativité restreinte, le temps s'écoulera plus lentement s'il est mesuré par une horloge en mouvement que s'il est mesuré par une horloge au repos. On en déduit que :

1. Une horloge à bord d'un avion se déplaçant vers l'est, dans la direction de la rotation de la Terre, a une vitesse plus grande (c'est-à-dire un temps "plus ralenti") qu'une horloge restée au sol.
2. Une horloge à bord d'un avion se déplaçant vers l'ouest, dans la direction opposée à la rotation de la Terre, aura une vitesse plus faible que celle donnée par une horloge restée au sol.

La relation entre la période propre T_p , donnée par les horloges aéroportées, et celle T donnée par les horloges au sol est :

$$T = \gamma_e T_p \quad \text{avec} \quad \gamma_e \approx 1 + \frac{\beta_e}{2}$$

au 1^{er} ordre. En notant R la distance à l'axe de la terre à laquelle s'effectue le vol, les vitesses à considérer sont :

$$v_{\rightarrow\text{ouest}} = v + \Omega R \quad \text{et} \quad v_{\rightarrow\text{est}} = v - \Omega R$$

où v est la vitesse de l'avion et $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$ rad/s la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

Néanmoins, un traitement complet de cette expérience doit considérer les phases d'accélération et de décélération des avions, ce qui nous place hors du cadre de la relativité restreinte (Figure 2.15).

Schématiquement, la relativité générale (voir par exemple [5, page 56]) indique qu'une augmentation du potentiel gravitationnel (donc de l'altitude) accélère l'horloge, c'est-à-dire qu'une horloge en haute altitude ira plus vite qu'une horloge située au niveau de la mer.

20. J.C. Hafele et R.E. Keating, *Predicted and Observed Relativistic Time Gains*, Science **177**, 166-170 (1972).

Après correction de tous les effets (dont une dérive qui se traduit par la pente sur les courbes de la Figure 2.15), on obtient les résultats présentés sur la Table 2.5.5 pour un vol réel en Boeing 707, en incluant l'effet des escales. L'accord entre la théorie et l'expérience est excellent et apporte une confirmation expérimentale des prédictions relativistes sur le comportement différent des horloges en mouvement et des horloges au repos.

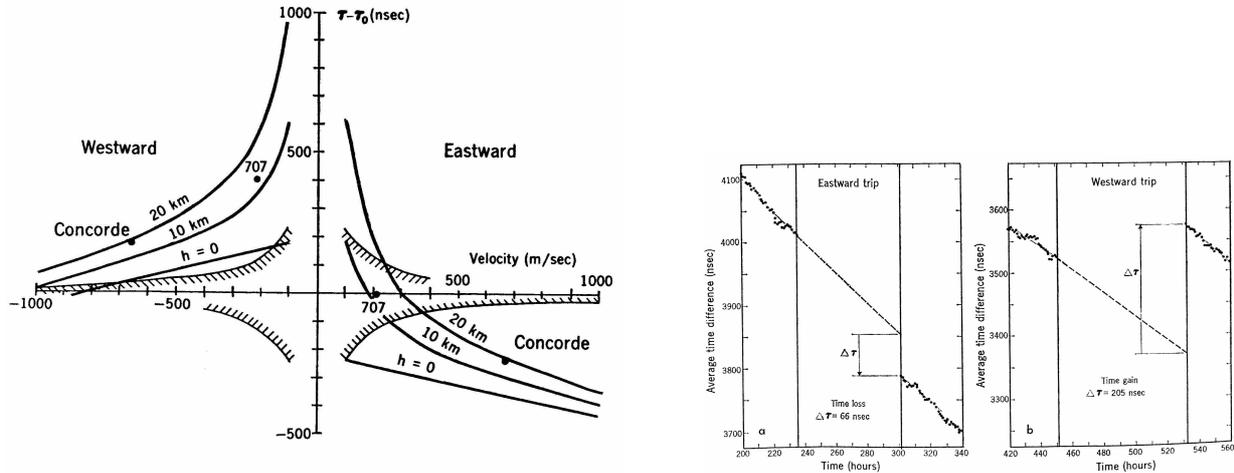


FIGURE 2.15 – A gauche : variations théoriques à différentes altitudes de l'avance temporelle d'une horloge lors d'un vol sans escale, vers l'ouest ou vers l'est. Les points représentent le cas d'un Boeing 707 et d'un Concorde. Les lignes hachurées délimitent la zone de sensibilité des horloges. A droite : écarts mesurés entre les horloges embarquées et l'horloge de référence (Figures extraites du papier original de **Hafele et Keating**).

	Relativité restreinte (ns)	Relativité générale (ns)	Total théorique (ns)	Expérience (ns)
Vol vers l'est	$- 184 \pm 18$	144 ± 14	$- 40 \pm 23$	$- 59 \pm 10$
Vol vers l'ouest	$+ 96 \pm 10$	179 ± 18	275 ± 21	273 ± 7

TABLE 2.1 – Comparaison entre les valeurs attendues et mesurées des décalages des horloges atomiques dans l'expérience embarquée de 1971 à bord d'un Boeing 707.

Remarque : L'expérience a été refaite en 1985 lorsque la navette spatiale Challenger a embarqué pendant sept jours une horloge atomique au césium à 330 km d'altitude, avec une orbite quasiment circulaire. La vitesse était de 7,7 km/s. Le décalage mesuré de 330 ps/s était encore une fois en accord avec les prévisions de la relativité restreinte et de la relativité générale.

Chapitre 3

Formalisme quadridimensionnel

Sommaire

3.1	Rappels de géométrie euclidienne	27
3.2	Intervalle relativiste entre deux événements	28
3.3	Quelques éléments de géométrie quadridimensionnelle	28

Introduction

Le formalisme quadridimensionnel, introduit par **Minkowski** en 1908, permet de développer des calculs plus concis que ceux utilisés au chapitre précédent, en utilisant un espace à quatre dimensions dont la géométrie n'est plus euclidienne. Il a résumé ceci par une formule devenue célèbre :

Désormais, l'espace en soi et le temps en soi sont condamnés à s'évanouir comme de pures ombres, et seule une sorte d'union des deux conservera une réalité autonome.

Cette démarche ne doit pas surprendre. L'électromagnétisme, en synthétisant les champs \vec{E} et \vec{B} , a suivi dans son développement une démarche semblable. La formulation de **Minkowski** est légèrement postérieure à celle d'**Einstein**, mais elle illustre bien le lien très fort qui existe entre les concepts physiques de la relativité et leur formulation mathématique.

Noter qu'**Einstein** était initialement opposé à l'idée de l'espace-temps¹ mais a ensuite reconnu son importance, en particulier pour le développement de la relativité générale.

3.1 Rappels de géométrie euclidienne

Dans l'espace euclidien avec un repère $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, le vecteur position \vec{r} qui relie l'origine O à un point M de coordonnées (x, y, z) se décompose sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. En introduisant la notation $x \equiv x^1$, $y \equiv x^2$ et $z \equiv x^3$, cette décomposition s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = \sum_{i=1}^3 x^i \vec{u}_i = x^i \vec{u}_i \quad (3.1)$$

où la dernière égalité vient de l'utilisation de la *convention d'Einstein* de sommation implicite sur les indices répétés en haut et en bas dans une même expression (on parle d'*indices muets*).

Si la base est orthonormée, on a :

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij} \quad (3.2)$$

1. Il parlait d'*érudition superflue* (*überflüssige gelehrsamkeit*).

où δ_{ij} est le *symbole de Kronecker* ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ ou 0 si $i \neq j$). On en déduit l'écriture du *carré scalaire* :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \delta_{ij} x^i x^j \quad (3.3)$$

En utilisant une autre base orthonormée $(\vec{u}'_x, \vec{u}'_y, \vec{u}'_z)$, tout en gardant la même origine O , la position du point M sera donnée dans le 2^e référentiel par $\vec{r}' = x'^i \vec{u}'_i$. Les composantes x'^i sont différentes des x^i , mais le carré scalaire ne dépend pas de la base, c'est-à-dire que :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad \text{ou encore} \quad \delta_{ij} x^i x^j = \delta_{ij} x'^i x'^j \quad (3.4)$$

3.2 Intervalle relativiste entre deux événements

On définira l'*intervalle* s_{AB} entre deux événements quelconques $A(t_A, x_A, y_A, z_A)$ et $B(t_B, x_B, y_B, z_B)$ (non nécessairement liés par la causalité) par :

$$s_{AB}^2 = c^2 (t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \ell)^2$$

Si A et B sont deux événements quelconques, alors s_{AB}^2 peut être positif (l'intervalle est du genre *temps*), négatif (l'intervalle est du genre *espace*) ou nul (l'intervalle est du genre *lumière*).

De la même manière, dans le référentiel (\mathcal{R}') , comme les origines O et O' sont confondues à $t = t' = 0$, on aura $s_{AB}^{\prime 2} = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta \ell')^2$.

Si l'événement A correspond à l'émission d'un signal lumineux en (x_A, y_A, z_A) à l'instant t_A dans un référentiel d'inertie (\mathcal{R}) et si l'événement B correspond à la réception de ce signal au point (x_B, y_B, z_B) à l'instant t_B toujours dans le référentiel (\mathcal{R}) , alors $s_{AB}^2 = 0$ à cause du 2^e postulat. Pour les mêmes raisons, $s_{AB}^{\prime 2} = 0$.

De manière plus générale, des raisonnements géométriques permettent de montrer que l'intervalle spatio-temporel entre deux événements quelconques est invariant. En effet, la transformation de **Lorentz** (2.2) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 &= \gamma_u^2 (c t' + \beta_u x')^2 - \gamma_u^2 (x' + \beta_u c t')^2 - y'^2 - z'^2 \\ &= \gamma_u^2 (c^2 t'^2 + \beta_u^2 x'^2 - x'^2 - \beta_u^2 c^2 t'^2) - y'^2 - z'^2 \\ &= \gamma_u^2 c^2 t'^2 (1 - \beta_u^2) - \gamma_u^2 x'^2 (1 - \beta_u^2) - y'^2 - z'^2 \\ &= c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'entre deux référentiels d'inertie (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') , on aura $s_{AB}^2 = s_{AB}^{\prime 2}$ ou encore :

$$c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \ell)^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta \ell')^2 \quad (3.5)$$

On remplace parfois le 2^e postulat par un énoncé équivalent :

Le carré de l'intervalle entre deux événements quelconque est un scalaire invariant dans tout changement de référentiel d'inertie

Remarque 1 : Entre deux événements infiniment voisins, l'intervalle élémentaire ds s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.6)$$

Remarque 2 : On trouve parfois le signe inverse dans la définition de s_{AB}^2 . Ceci ne change rien à la physique sous-jacente.

3.3 Quelques éléments de géométrie quadridimensionnelle

3.3.1 Généralités

Il est naturel, dans le cadre de la relativité restreinte, d'étendre la géométrie euclidienne à trois dimensions à une nouvelle géométrie à quatre dimensions, en associant une dimension temporelle aux dimensions spatiales.

L'espace-temps ainsi introduit est un espace vectoriel non euclidien à quatre dimensions. Un point dans cet espace est un *événement* caractérisé par quatre coordonnées x^μ (où μ varie de 0 à 3)² :

$$x^0 \equiv ct \quad x^1 \equiv x \quad x^2 \equiv y \quad x^3 \equiv z \quad (3.7)$$

De manière synthétique, un événement peut s'écrire $x^\mu = \{ct, x, y, z\}$.

D'après (3.5), les coordonnées $\{ct, x, y, z\}$ et $\{ct', x', y', z'\}$ d'un même événement dans deux référentiels d'inertie (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') sont reliées par :

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (3.8)$$

Cette équation ayant la même forme que le produit scalaire (3.4), on est amené à interpréter un changement de référentiel en relativité comme un changement de base dans l'espace de **Minkowski** qui fait passer des coordonnées x^μ aux x'^μ . La quantité $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ est un *invariant relativiste*.

Dans l'espace de **Minkowski**, une base est formée par quatre vecteurs à quatre dimensions ($\underline{e}_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$).

Par définition, le *quadrivecteur position* \underline{R} (ou *quadrivecteur espace-temps*) est associé à tout événement de coordonnées (ct, x, y, z) . On le note³ :

$$\underline{R} = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu \underline{e}_\mu = x^\mu \underline{e}_\mu = \{ct, \vec{r}\} = \{ct, x, y, z\} \quad (3.9)$$

Il caractérise la distance, en espace et en temps, entre l'événement \mathcal{E} et l'événement origine caractérisé par $(0, 0, 0, 0)$. La 1^{re} coordonnée de ce quadrivecteur est sa *composante temporelle* et les trois suivantes forment ses *composantes spatiales*.

Remarque 1 : Pour distinguer les expressions exprimées dans l'espace euclidien (à trois dimensions) de celles exprimées dans l'espace de **Minkowski** (à quatre dimensions), on utilisera des lettres latines pour les indices tridimensionnels (de 1 à 3) et des lettres grecques pour les indices quadrimensionnels (de 0 à 3).

Remarque 2 : Il est important de noter que dans le cas général, un vecteur à quatre dimensions de l'espace de **Minkowski** n'est pas un quadrivecteur. Pour être appelé *quadrivecteur*, un vecteur à quatre dimensions doit en plus se transformer comme le quadrivecteur position dans une transformation de **Lorentz**.

Remarque 3 : La notation à l'aide des indices muets permet une écriture concise. Par exemple, la transformation de **Lorentz** (2.6) peut s'écrire :

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad (3.10)$$

3.3.2 Produit scalaire

D'après (3.4), l'expression quadratique invariante dans un changement de base dépend du produit scalaire. D'après (3.8), la signature $(+, -, -, -)$ de l'expression quadratique invariante par changement de référentiel indique qu'on ne peut choisir un produit scalaire euclidien dans l'espace de Minkowski. On définit le *produit scalaire dans l'espace de Minkowski* par son action sur les vecteurs de la base qui doit être, d'après la signature :

$$\underline{e}_0 \cdot \underline{e}_0 = 1 \quad \underline{e}_i \cdot \underline{e}_0 = \underline{e}_0 \cdot \underline{e}_i = 0 \quad \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = -\delta_{ij}$$

On peut résumer ceci en introduisant une matrice $(g_{\mu\nu})$ dont les seuls éléments non nuls sont diagonaux. On a alors :

$$\underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \text{avec} \quad (g_{\mu\nu}) = G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Le carré scalaire ou *norme* du quadrivecteur position \underline{R} s'écrit $\underline{R} \cdot \underline{R} = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Il a la même forme que l'invariant relativiste (3.8).

2. Un bon résumé des propriétés importantes des quadrivecteurs peut être trouvé dans [10].

3. Il n'existe pas de notation unifiée pour les quadrivecteurs. On peut trouver \underline{R} , \vec{R} , \underline{R} , \vec{R} , etc...

On définit ainsi la *métrique de Minkowski* car le produit scalaire permet de définir une distance entre deux événements repérés par les quadrivecteurs \underline{A} et \underline{B} à partir du carré scalaire de leur quadri-séparation $(\underline{A} - \underline{B})^2$.

En notant $\underline{A} = \{a^0, a^1, a^2, a^3\} = a^\mu \underline{e}_\mu$ et $\underline{B} = \{b^0, b^1, b^2, b^3\} = b^\nu \underline{e}_\nu$ deux quadrivecteurs position quelconques, leur produit scalaire vérifie par définition :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (a^\mu \underline{e}_\mu) \cdot (b^\nu \underline{e}_\nu) = a^\mu b^\nu (\underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu) = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 \quad (3.12)$$

Si on doit décomposer le produit scalaire de $\underline{X} = \{x^0, \vec{x}\}$ et $\underline{Y} = \{y^0, \vec{y}\}$ en une partie spatiale et une partie temporelle, on écrira :

$$\underline{X} \cdot \underline{Y} = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \quad (3.13)$$

3.3.3 Genre des quadrivecteurs et lien avec la causalité

Genre

On classe les quadrivecteurs en trois catégories selon la valeur de leur norme qui, contrairement à l'espace euclidien où la norme d'un vecteur est toujours positive, peut être positive, négative ou nulle :

1. Si $\underline{X} \cdot \underline{X} > 0$, le quadrivecteur \underline{X} est dit *du genre temps*. Ses composantes vérifient dans tous les référentiels $x^0 > \|\vec{x}\|$.

On peut toujours se ramener par une rotation spatiale à un événement tel que $\{x^0, x^1, 0, 0\}$. La transformation de **Lorentz** permet alors d'écrire :

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \quad \text{et} \quad x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \quad (3.14)$$

En choisissant $\beta = x^1/x^0$, on peut définir un référentiel dans lequel $\vec{x}' = \vec{0}$ (on a bien $\beta < 1$ car $|x^0| > |x^1|$), c'est-à-dire qu'au moyen d'un changement de référentiel adéquat, on peut faire en sorte que dans le nouveau référentiel, le quadrivecteur n'ait plus que sa composante temporelle non nulle.

Si deux événements sont séparés par un quadrivecteur du genre temps, alors le même raisonnement conduit à un référentiel dans lequel ces deux événements ont la même position spatiale.

2. Si $\underline{X} \cdot \underline{X} < 0$, le quadrivecteur est dit *du genre espace*. Ses composantes vérifient dans tous les référentiels $x^0 < \|\vec{x}\|$.

On pourrait montrer qu'il existe un référentiel dans laquelle la composante temporelle est nulle. D'après (3.14), il suffit de prendre $\beta = x^0/x^1$.

Si deux événements sont séparés par un quadrivecteur du genre espace, alors il existe un référentiel dans lequel ces deux événements sont simultanés.

3. Si $\underline{X} \cdot \underline{X} = 0$, le quadrivecteur est dit *du genre lumière*. Ses composantes vérifient dans tous les référentiels $x^0 = \|\vec{x}\|$.

L'événement de quadrivecteur position \underline{X} est relié à l'événement origine par un signal lumineux puisque $\|\vec{x}\| = ct$.

Lien avec la causalité

La classification ci-dessus permet de séparer l'espace-temps en quatre régions par rapport à tout événement de référence \mathcal{E}_0 . On considère un événement quelconque \mathcal{E} séparé de \mathcal{E}_0 par le quadrivecteur $\underline{S} = \underline{X} - \underline{X}_0$:

1. Si \underline{S} est du genre temps avec $s^0 > 0$, alors \mathcal{E} se situe dans le futur de \mathcal{E}_0 .
2. Au contraire, si \underline{S} est du genre temps avec $s^0 < 0$, alors \mathcal{E} se situe dans le passé de \mathcal{E}_0 .
3. Si \underline{S} est du genre lumière, il se situe sur le *cône de lumière* (Figure 3.1) d'équation :

$$(s^0)^2 - (s^1)^2 - (s^2)^2 - (s^3)^2 = 0 \quad (3.15)$$

4. Si \underline{S} est du genre espace, la séparation est uniquement spatiale et les événement ne sont pas reliés par la causalité.

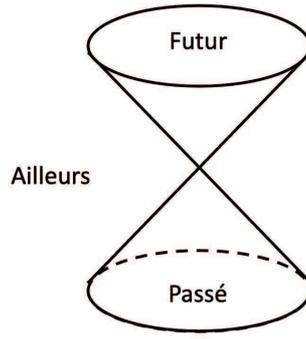


FIGURE 3.1 – Cône de lumière.

3.3.4 Propriétés des quadrivecteurs

Pour caractériser un quadrivecteur, on utilisera souvent la propriété importante suivante :

Lorsque le produit scalaire d'un vecteur à quatre dimensions et d'un quadrivecteur est un invariant de Lorentz, alors le vecteur à quatre dimensions est un quadrivecteur

On en déduit par exemple que le produit d'un quadrivecteur par un invariant de **Lorentz** est un autre quadrivecteur.

Remarque 1 : Le carré scalaire d'un quadrivecteur est donc invariant dans tout changement de référentiel d'inertie et donc dans toute transformation de **Lorentz**.

Remarque 2 : On a vu (§ 3.2) que le carré s_{AB}^2 de l'intervalle entre deux événements était invariant par changement de référentiel d'inertie. Il peut s'écrire comme le carré scalaire du quadrivecteur $\underline{X}_B - \underline{X}_A$:

$$s_{AB}^2 = (\underline{X}_B - \underline{X}_A)^2$$

Remarque 3 : On présente parfois la coordonnée temporelle sous une forme complexe ($x^0 = ict$). La métrique doit alors être modifiée pour que l'invariant relativiste soit $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. L'avantage de la présentation complexe utilisée est alors que les quatre coordonnées du quadrivecteur sont traitées sur le même plan [2].

3.3.5 Autres quadrivecteurs

Le quadrivecteur vitesse

En notant $d\tau$ l'intervalle de temps propre mesuré par une horloge entraînée par (\mathcal{R}'), on peut introduire le *quadrivecteur vitesse* \underline{V} défini par :

$$\underline{V} = \frac{d\underline{R}}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = \begin{cases} x^0 = \gamma c \\ x^1 = \gamma v_x \\ x^2 = \gamma v_y \\ x^3 = \gamma v_z \end{cases} \quad (3.16)$$

où $d\underline{R} = (cdt, d\vec{r})$ est également un quadrivecteur. On a introduit le *facteur de Lorentz instantané* :

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.17)$$

qui dépend de la vitesse instantanée de la particule et qui varie au cours du temps, au contraire de facteur γ_u de la transformation de **Lorentz** spéciale qui est constant.

La norme du quadrivecteur vitesse vaut :

$$\underline{V} \cdot \underline{V} = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 \quad (3.18)$$

La norme du quadrivecteur étant non nulle, on ne peut jamais annuler en même temps les quatre composantes du quadrivecteur.

La transformation de **Lorentz** appliquée au quadrivecteur vitesse permet de retrouver la loi (2.11) de composition des vitesses.

Le quadrivecteur accélération (*)

De la même manière, on introduit le *quadrivecteur accélération* \underline{A} défini par :

$$\underline{A} = \frac{d\underline{V}}{d\tau} = \left(\frac{\gamma^4}{c} \vec{v} \cdot \vec{a}, \frac{\gamma^4}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) \quad (3.19)$$

Comme pour le quadrivecteur vitesse, la transformation de **Lorentz** appliquée au quadrivecteur accélération permet de retrouver la loi (2.16) de composition des accélérations (le calcul est TRES pénible donc ne cherchez SURTOUT pas à le refaire). De toute façon, ce quadrivecteur ne nous servira pas beaucoup..

3.3.6 Remarques sémantiques

Une quantité est dite *invariante* si elle conserve la même valeur dans tous les référentiels d'inertie (en mouvements relatifs les uns par rapport aux autres). Par exemple, le module de la vitesse de la lumière dans le vide est un invariant relativiste. Par contre, on verra plus tard que l'énergie ou l'impulsion d'une particule ne sont pas des invariants.

Une quantité est dite *conservée* si elle garde la même valeur dans un même référentiel d'inertie *avant* et *après* un événement. Par exemple, l'énergie totale d'un système de particules isolées est conservée, sa valeur restant identique avant et après une collision. Il en est de même pour l'impulsion totale. Par contre, la somme des masses des particules d'un système isolé n'est pas conservée.

Une quantité est dite *constante* si elle ne varie pas au cours du temps, sans qu'on puisse parler ni d'invariance, ni de conservation. Par exemple, la vitesse d'un immeuble par rapport à la Terre est constante (nulle!), mais ni invariante (la vitesse de cet immeuble par rapport à un avion sera non nulle), ni conservée (car il est impossible de définir des instants *avant* et *après*).

Une quantité peut-être constante et invariante, mais la signification physique n'est pas la même. Par exemple, le module de la vitesse de la lumière dans le vide est constant, mais également invariant. La 1^{re} affirmation signifie que c ne change pas au cours du temps, tandis que la 2^e signifie que cette valeur sera la même pour deux observateurs en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

Chapitre 4

Optique relativiste

Sommaire

4.1	Le quadrivecteur d'onde	33
4.2	Applications	34
4.3	Annexes (*)	37

Introduction

La *contraction des longueurs* vient de la position des extrémités des objets, évaluées au même instant, dans un référentiel donné. On va voir dans ce chapitre l'*apparence* des objets, qui résulte de l'arrivée de photons au même instant sur un observateur, mais ces photons peuvent avoir été émis à des instants différents.

L'optique relativiste est un cas d'application immédiat et pratique du formalisme quadrivectoriel vu précédemment.

4.1 Le quadrivecteur d'onde

4.1.1 Définition

On considère un phénomène ondulatoire dont l'amplitude dans un référentiel (\mathcal{R}) se met sous la forme générale $A \propto \exp(-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$ où ω est la pulsation et \vec{k} le vecteur d'onde exprimés dans (\mathcal{R}).

$$\underline{K} = \left\{ \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right\} \quad (4.1)$$

est un quadrivecteur qu'on appellera *quadrivecteur d'onde*. Avec cette définition, la phase est automatiquement un invariant relativiste.

On peut donc écrire immédiatement sous la forme suivante la transformation lors du passage de (\mathcal{R}) à (\mathcal{R}') ou réciproquement :

$$\underline{K}' = \begin{cases} \frac{\omega'}{c} = \gamma_u \left(\frac{\omega}{c} - \beta_u k_x \right) \\ k'_x = \gamma_u \left(k_x - \beta_u \frac{\omega}{c} \right) \\ k'_y = k_y \\ k'_z = k_z \end{cases} \quad \text{ou réciproquement} \quad \underline{K} = \begin{cases} \frac{\omega}{c} = \gamma_u \left(\frac{\omega'}{c} + \beta_u k'_x \right) \\ k_x = \gamma_u \left(k'_x + \beta_u \frac{\omega'}{c} \right) \\ k_y = k'_y \\ k_z = k'_z \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1.2 Cas d'une onde électromagnétique dans le vide

Le carré scalaire du quadrivecteur \underline{K} est nul dans tous les référentiels pour une onde se propageant dans le vide illimité puisque dans ce cas :

$$\underline{K}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 \quad (4.3)$$

puisque la relation de dispersion est alors $k = \omega/c$. Le quadrivecteur d'onde est donc un quadrivecteur de genre lumière.

4.2 Applications

4.2.1 Effet Doppler

L'*effet Doppler* est la variation de la fréquence d'un signal lorsque l'émetteur et le récepteur sont en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. Cet effet a été étudié par **Doppler** sur les ondes acoustiques et étendu aux ondes lumineuses par **Fizeau**. Le traitement classique de l'effet **Doppler** est rappelé au § 4.3.1. Le traitement relativiste de l'effet **Doppler** sur les ondes lumineuses est effectué ici.

On note \underline{K} le quadrivecteur correspondant à l'onde reçue par l'observateur dans (\mathcal{R}) et \underline{K}' le quadrivecteur de l'onde dans le référentiel propre (\mathcal{R}') de la source en mouvement (Figure 4.1).

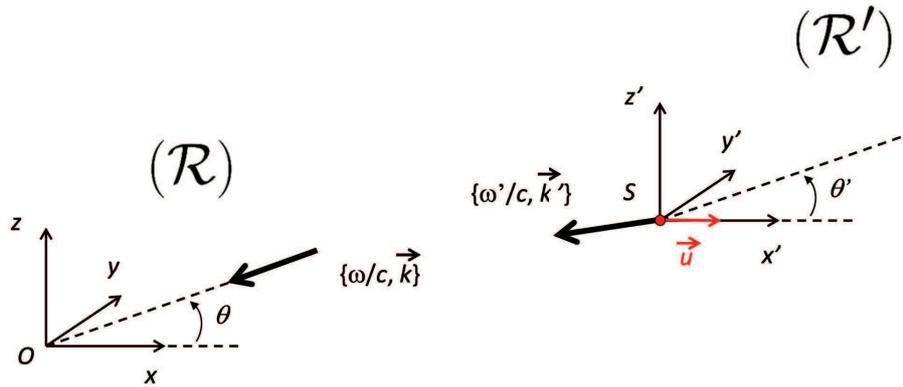


FIGURE 4.1 – Traitement relativiste de l'effet **Doppler** : la source S est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v} par rapport à l'axe Ox et émet dans son référentiel propre un signal de fréquence $\nu' = 1/T'$.

Finalement, on peut noter les cas particuliers suivants :

- Si $\theta = 0$, on a l'*effet Doppler longitudinal*. La source s'éloigne de l'observateur si $u > 0$ et s'en rapproche si $u < 0$:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 - u/c}{1 + u/c}}$$

- Si $\theta = \pi$, on a une autre manifestation de l'effet **Doppler** longitudinal. Cette fois, la source se rapproche de l'observateur si $u > 0$ et s'en éloigne si $u < 0$:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}$$

- Si $\theta = \pi/2$, on a :

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

La théorie de la relativité prédit un effet **Doppler** transversal, ce que ne prédit pas la théorie classique (§ 4.3.1). Cet effet est une conséquence de la dilatation des intervalles de temps.

En comparant ces trois expressions avec le cas classique, on voit que la distinction entre les théories classiques et relativistes de l'effet **Doppler** transversal ne peut se faire qu'au 2^e ordre en $\beta = u/c$.

4.2.2 Lignes spectrales émises par des atomes en mouvement

Une des premières expériences à trancher entre les deux théories classiques et relativistes a été faite par **Ives** et **Stilwell**¹ en 1940. Cette expérience, dont le principe avait été suggéré par **Einstein** en 1907, analyse la raie H_β d'atomes d'hydrogène en mouvement dans des directions opposées, émettant un rayonnement de pulsation propre ω_0 . Elle consiste à mesurer la longueur d'onde de la raie émise par les atomes venant vers l'observateur, et la comparer à celle des atomes allant en sens opposé. On obtient deux fréquences différentes qui sont, suivant la théorie classique :

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad \text{et} \quad \nu_2 = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Les longueurs d'onde correspondantes s'écrivent alors :

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_0}{1 - \frac{v}{c}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

L'observable dans cette expérience est le centre λ_c de l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$ qui est décalé de $\delta\lambda_c$ par rapport à λ_0 . On obtient :

$$\delta\lambda_c = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 = \lambda_0 \frac{v^2}{c^2} \quad (4.4)$$

Selon la théorie relativiste, on a plutôt :

$$\lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

d'où :

$$\lambda_c = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Dans la limite des faibles vitesses, on obtient :

$$\delta\lambda_c = \lambda_0 \frac{v^2}{2c^2} \quad (4.5)$$

La comparaison entre (4.4) et (4.5) a permis à **Ives** et **Stilwell** en 1940 de mettre pour la première fois en évidence un effet relativiste lié à la dilatation des intervalles de temps en mesurant un changement de fréquence des lignes spectrales émises par des atomes en mouvement rapide. L'effet restait très faible car la vitesse des atomes était de l'ordre de 0,5% de la vitesse de la lumière, mais les résultats expérimentaux (Figure 4.2) validèrent la théorie relativiste sans ambiguïté.

4.2.3 Traitement relativiste des aberrations

Le phénomène des aberrations consiste à étudier la direction apparente de deux rayons lumineux vu dans deux référentiels en mouvement relatifs l'un par rapport à l'autre. On prendra par commodité ce déplacement selon Ox .

On considère par exemple le référentiel (\mathcal{R}_0) de Copernic², supposé inertiel, dans lequel la Terre est animée d'un mouvement rectiligne uniforme \vec{u} si on considère un temps suffisamment court. On considère la lumière venant d'une étoile très éloignée, dont la direction fait l'angle θ_0 avec l'axe Ox . Ce rayon lumineux apparaîtra, pour un observateur terrestre, sous un angle θ' différent de θ_0 . On choisit l'axe Oy de façon à ce que le vecteur d'onde soit compris dans le plan (\vec{u}_x, \vec{u}_z) (Figure 4.3).

1. H.E. Ives et G.R. Stilwell, *An Experimental Study of the Rate of a Moving Atomic Clock*, J. Opt. Soc. Am. **28**, 215 (1938) et **31**, 369-374 (1941).

2. Le référentiel de Copernic est le référentiel dont l'origine est le centre de masse du système solaire. Les trois axes pointent vers des étoiles suffisamment lointaines (étoile polaire, β du Cetaure)) pour être considérées comme fixes.

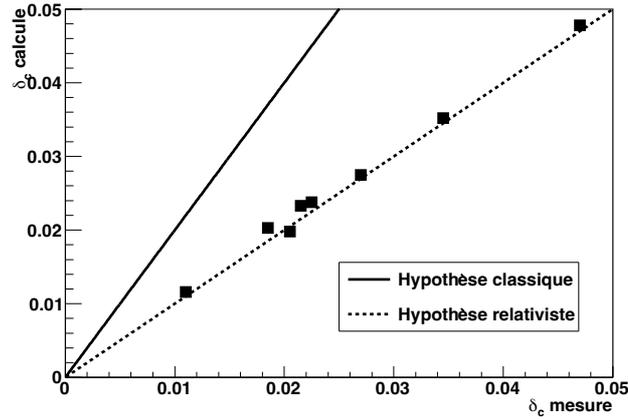


FIGURE 4.2 – Résultats de l'expérience d'Ives et Stilwell pour une source se déplaçant à 0,5% de la vitesse de la lumière. Les barres d'erreur ne sont pas représentées car non significatives.

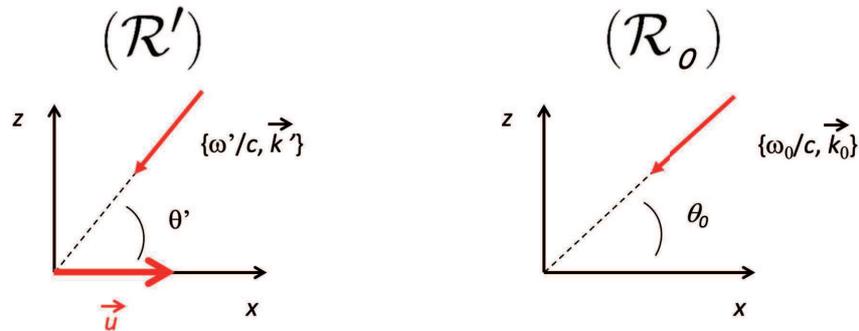


FIGURE 4.3 – Un rayon lumineux émis avec l'angle θ_0 dans le référentiel de Copernic sera reçu dans un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier avec un angle $\theta' \neq \theta_0$.

On a donc, en utilisant $\omega' = \gamma_u (\omega_0 - \beta c k_{x,0}) = \gamma_u \omega_0 (1 + \beta \cos(\theta_0))$:

$$\begin{cases} \sin(\theta') = \frac{\omega_0 \sin(\theta_0)}{\omega'} = \frac{\sin(\theta_0)}{\gamma_u (1 + \beta \cos(\theta_0))} \\ \cos(\theta') = \frac{\gamma_u \omega_0 (\cos(\theta_0) + \beta)}{\omega'} = \frac{\cos(\theta_0) + \beta}{1 + \beta \cos(\theta_0)} \end{cases} \quad (4.6)$$

et

$$\tan(\theta') = \frac{\sin(\theta_0)}{\gamma_u (\cos(\theta_0) + \beta_u)} = \frac{\sin(\theta_0) \sqrt{1 - u^2/c^2}}{\cos(\theta_0) + \beta_u} \quad (4.7)$$

cette expression représente le traitement relativiste du phénomène d'aberration.

En comparant avec l'expression classique (4.11), on constate que l'écart avec l'expression classique est faible pour des faibles vitesses. Comme dans le cas qui nous concerne $u/c \approx 10^{-4}$, on est incapable de distinguer les formulations classiques et relativistes par une expérience.

On exprime généralement (4.7) sous une forme plus simple en utilisant $\tan(\theta'/2) = \sin(\theta')/(1 + \cos(\theta'))$. On obtient rapidement :

$$\tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.8)$$

4.2.4 Apparence des objets en mouvement

L'apparence des objets en mouvement s'obtient en combinant les divers effets vus dans ce chapitre (décalage temporel, aberration et effet **Doppler**).

On suppose un observateur immobile situé en O . A l'instant considéré, on imagine un observateur fictif O' animé de la même vitesse que l'objet (donc immobile par rapport à l'objet).

L'image perçue par l'observateur en O est l'ensemble des rayons lumineux caractérisés par leurs coordonnées sphériques (θ, φ) sur la sphère centrée en O . De même, l'image perçue par l'observateur en O' est l'ensemble des rayons lumineux caractérisés par leurs coordonnées sphériques (θ', φ') sur la sphère centrée en O' .

L'image perçue par O' est simple puisque l'objet est immobile dans ce référentiel. Pour en déduire l'image perçue par O , on utilise les relations d'aberration (4.6) qui donnent le lien entre les directions (θ, φ) et (θ', φ') d'un même rayon lumineux dans deux référentiels.

Par exemple, pour déterminer l'apparence d'un cube en mouvement³, on va supposer qu'il est suffisamment éloigné pour que les rayons soient parallèles, et on considère l'instant où le cube passe devant l'observateur. Dans le référentiel (\mathcal{R}) de l'observateur, on a alors $\theta = \pi/2$. L'angle θ' dans (\mathcal{R}') s'obtient à l'aide de (4.6) et est déterminé par $\cos(\theta') = \beta$ et $\sin(\theta') = 1/\gamma$. L'observateur fictif O' voit le cube sous un angle différent puisque le cube semble avoir tourné de l'angle $\delta = \theta - \theta'$ tel que :

$$\sin(\theta - \theta') = \sin(\theta) \cos(\theta') - \cos(\theta) \sin(\theta') = 1 \times \beta - 0 \times 1/\gamma \quad \text{ou encore} \quad \sin(\delta) = \beta$$

Cet effet sera d'autant plus important que la vitesse est élevée (Fig 4.4).

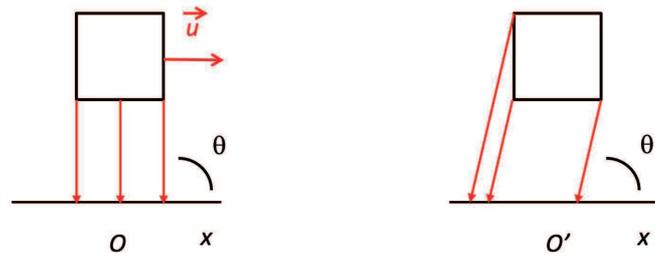


FIGURE 4.4 – Vue du dessus d'un cube en mouvement.

4.3 Annexes (*)

4.3.1 Traitement classique de l'effet Doppler

La théorie classique de l'effet **Doppler** sur les ondes lumineuses suppose l'existence d'un référentiel privilégié (\mathcal{R}) (l'éther!) dans lequel la vitesse de la lumière est c . On note (\mathcal{R}') le référentiel propre de la source. On note ν la fréquence du signal reçu par l'observateur, λ sa longueur d'onde dans le vide, \vec{u} la vitesse de la source par rapport à l'observateur situé en O , supposé immobile dans (\mathcal{R}) , et θ l'angle entre Ox et OS (Figure 4.5).

On suppose que la source S est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{u} par rapport à l'axe Ox et émet dans son référentiel propre un signal de fréquence $\nu' = 1/T'$, et que le déplacement uT' est petit devant OS , ce qui permet de dire que θ reste constant sur une période.

A l'instant t , la source $S(x, y, z)$ émet un signal lumineux qui est reçu par l'observateur en O à l'instant t_1 tel que :

$$t_1 = t + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{c}$$

3. Cet exemple est repris de [10].

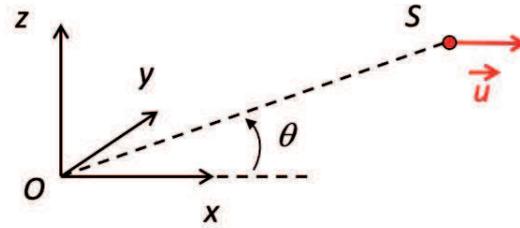


FIGURE 4.5 – Traitement classique de l'effet **Doppler** : la source S est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v} par rapport à l'axe Ox et émet dans son référentiel propre un signal de fréquence $\nu' = 1/T'$.

A l'instant $t + T'$, la source est au point de coordonnées $(x + uT', y, z)$ et émet un 2^e signal qui sera reçu en O à l'instant t_2 donné par :

$$t_2 = t + T' + \frac{\sqrt{(x + uT')^2 + y^2 + z^2}}{c}$$

La période apparente T (temps impropre) pour l'observateur situé en O est donc :

$$T = t_2 - t_1 = T' + \frac{1}{c} \left[\sqrt{(x + uT')^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

Comme $vT' \ll OS$, on a également $vT' \ll \sqrt{(x + uT')^2 + y^2 + z^2}$. Finalement :

$$\begin{aligned} T &\approx T' + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{c} \left[\left(1 + \frac{2uxT'}{2(x^2 + y^2 + z^2)} + \dots \right) - 1 \right] \\ &\approx T' + \frac{uT'x}{c\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = T' \left(1 + \frac{u}{c} \cos(\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

On présente classiquement le résultat précédent sous trois formes équivalentes :

$$T = T' \left(1 + \frac{u}{c} \cos(\theta) \right) \quad \Leftrightarrow \quad \nu = \frac{\nu'}{1 + \frac{u}{c} \cos(\theta)} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda' \left(1 + \frac{u}{c} \cos(\theta) \right) \quad (4.10)$$

On peut noter les cas particuliers suivants :

- Si $\theta = 0$, on a l'effet **Doppler longitudinal**. La source s'éloigne de l'observateur si $u > 0$ et s'en rapproche si $u < 0$:

$$\nu = \frac{\nu'}{1 + u/c}$$

- Si $\theta = \pi$, on a également l'effet **Doppler longitudinal**. La source se rapproche de l'observateur si $u > 0$ et s'en éloigne si $u < 0$:

$$\nu = \frac{\nu'}{1 - u/c}$$

- Si $\theta = \pi/2$, on obtient $\nu = \nu'$. Il n'y a pas d'effet **Doppler transversal** selon la mécanique newtonienne.

4.3.2 Traitement classique des aberrations

Le traitement classique des aberrations consiste à utiliser la loi de transformation classique des vitesses (1.3) et non plus la forme relativiste (2.11). On obtient :

$$\begin{cases} v'_x = -c \cos(\theta') = -c \cos(\theta_0) - u \\ v'_y = 0 \\ v'_z = -c \sin(\theta') = -c \sin(\theta_0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta') = \frac{\sin(\theta_0)}{\cos(\theta_0) + u/c} \quad (4.11)$$