
Relativité restreinte

Ce cours d'une quinzaine d'heures a été dispensé en L3 Physique Fondamentale de l'Université Paris-Saclay en 2023-2024. Il concerne les étudiants du Magistère de Physique et de l'ENS Paris-Saclay et est divisé en six chapitres distincts :

1. **Contexte historique (*)**
2. **Principes de la relativité restreinte et transformation de Lorentz**
3. **Formalisme quadridimensionnel**
4. **Optique relativiste**
5. **Dynamique relativiste**
6. **Electrodynamique relativiste**

Ces notes complètent ce qui est dit en cours mais ne sauraient dispenser d'une assiduité régulière. En particulier, la plupart des calculs ne seront pas donnés dans le polycopié.

Dans ce manuscrit, tous les paragraphes dont le titre est suivi d'un astérisque (*) correspondent soit à des rappels de physique classique que chaque étudiant(e) devrait connaître et maîtriser en L3 de physique fondamentale, soit à des parties allant au delà du programme de L3. Aucune de ces parties ne sera exigible pour les examens de l'UE *Relativité restreinte* (et c'est bien dommage). C'est en particulier le cas de l'intégralité du 1^{er} chapitre.

Dans le texte, les noms propres en gras correspondent à des scientifiques dont les principales contributions à la relativité restreinte sont détaillées à partir de la page 2 du préambule, même si leur contribution date d'une époque antérieure à la formulation de la théorie relativiste !

Patrick Puzo
Janvier 2024

Le *who's who* de la relativité restreinte

- William **Bertozzi** (1931), physicien américain. Il réalise en 1964 au MIT la première expérience qui montre la saturation de la vitesse d'électrons ultra-relativistes.
- Alain **Brillet** (1947-), physicien français. Il effectue avec **Hall** en 1979 la mesure la plus précise à ce jour de l'anisotropie de la vitesse de la lumière avec une précision de $3 \cdot 10^{-15}$.
- Alfred **Bucherer** (1863 - 1927), physicien allemand. Il effectue avec **Kaufmann** les premières mesures sur l'impulsion de particules de haute énergie. Il est le premier à utiliser en 1906 l'expression *théorie de la relativité d'Einstein* (*Einsteinsche Relativitätstheorie*).
- Christian **Doppler** (1803 - 1853), mathématicien et physicien autrichien. Il décrit l'*effet Doppler* en 1842 qui est un effet purement longitudinal en physique classique. La découverte d'un effet Doppler transverse par **Ives** et **Stilwell** sert à établir la relativité en 1938.
- Albert **Einstein** (1879 - 1955), physicien allemand, suisse puis américain, prix Nobel de physique en 1921. Il publie en 1905 l'article fondateur de la relativité restreinte (un an avant de soutenir sa thèse) et celui qui fonde la relativité générale en 1915. Avec **Podolsky** et **Rosen**, il énonce en 1935 le *paradoxe EPR*.
- Georges **FitzGerald** (avec un "G" majuscule) (1851-1901), physicien irlandais. Pour tenter d'expliquer le résultat de l'expérience de **Michelson-Morley**, il publie en 1889 un article dans lequel il énonce que les objets en mouvement se raccourcissent dans la direction de leur déplacement.
- Hippolyte **Fizeau** (1819 - 1896), physicien français. Il effectue la première mesure précise de la vitesse de la lumière en 1851. Il est également connu pour avoir réalisé une expérience la même année qui semble indiquer un entraînement partiel de l'éther..
- Léon **Foucault** (1819 - 1868), physicien et astronome français. A l'aide d'une série de miroirs tournants, il mesure en 1862 la vitesse de la lumière et donne une valeur ($298\,000 \pm 500$ km/s) qui restera une référence jusqu'aux travaux de **Michelson**.
- Augustin **Fresnel** (1788 - 1827), physicien français. Il propose en 1818 une théorie selon laquelle le coefficient de couplage à l'éther est $1 - 1/n^2$ dans un milieu d'indice n . Ceci sera observé expérimentalement par **Fizeau** en 1851.
- David **Frisch** (1918 - 1991), physicien américain. Il réalise en 1963 avec **Smith** une version améliorée de l'expérience de **Rossi et Hall**.
- Joseph **Hafele** (1933 - 2014), physicien américain. L'expérience qu'il conduit en 1971 à l'aide d'horloges en mouvement avec **Keating** est considérée comme un test complet de la théorie de la relativité, aussi bien restreinte que générale.
- David **Hall**, physicien américain, assistant de **Rossi** avec qui il réalise en 1940 l'expérience de confirmation de la dilatation des intervalles de temps à l'aide de la désintégration des muons (même si à l'époque ils pensaient qu'il s'agissait de mésons).

-
- John Lewis **Hall** (1934-), physicien américain, Prix Nobel de physique en 2005. Il effectue avec **Brillet** en 1979 la mesure la plus précise à ce jour de l'anisotropie de la vitesse de la lumière avec une précision de $3 \cdot 10^{-15}$.
 - Christian **Huygens** (1629 - 1695), physicien et astronome néerlandais. Il suppose que l'écart mesuré par **Rømer** à six mois d'intervalle sur l'apparition des éclipses de Io est dû à la propagation de la lumière sur le rayon de l'orbite terrestre et en déduit la première valeur de la vitesse de la lumière. Il améliore également la précision des horloges mécaniques qui passe de 15' à 15" par jour.
 - Herbert **Ives** (1882 - 1953), physicien américain. Opposant farouche à la relativité restreinte, il est connu pour l'*expérience d'Ives et Stilwell* de 1938 qu'il interprète comme une preuve de l'existence de l'éther et une réfutation de la relativité. La postérité retient que c'est en fait une confirmation directe de l'effet **Doppler** transverse que seule la relativité restreinte peut expliquer..
 - Walter **Kaufmann** (1871 - 1947), physicien allemand. Il montre en 1901 que des électrons rapides dans un champ magnétique se comportent comme si leur masse m était remplacée par γm .
 - Richard **Keating** (1941 - 2006), astronome américain. L'expérience qu'il conduit en 1971 à l'aide d'horloges en mouvement avec **Hafele** est considérée comme un test complet de la théorie de la relativité, aussi bien restreinte que générale.
 - Roy **Kennedy** (1897 - 1986), physicien américain. Il réalise en 1932 avec **Thorndike** une version améliorée de l'*expérience de Michelson et Morley*.
 - Joseph **Larmor** (1857 - 1942), physicien et mathématicien nord-irlandais. Il publie ce qu'on appelle maintenant les *transformations de Lorentz* en 1897, deux ans avant **Lorentz** et huit ans avant **Einstein**. Dès 1900, il évoque également la dilatation des intervalles de temps et la contraction des longueurs.
 - Paul **Langevin** (1872 - 1946), physicien français. Il est le premier en France à enseigner la relativité restreinte en 1910 et introduit à cette occasion en 1911 le *paradoxe des jumeaux*.
 - Urbain **Le Verrier** (1811 - 1877), astronome français. Il montre en 1859 que le périhélie de Mercure tourne plus vite de 43" par siècle que ne le prédisait la mécanique galiléenne. A l'époque, il interprète ceci par l'existence d'une nouvelle planète. A posteriori, on sait aujourd'hui qu'il s'agit d'une limite de la mécanique galiléenne qui ne sera résolue que par l'introduction de la relativité générale.
 - Ludwig **Lorenz** (1829 - 1891), physicien danois. Il introduit la jauge qui porte désormais son nom et les potentiels retardés en 1867. A ne pas confondre avec **Lorentz**. Ils entretenaient d'ailleurs des relations exécrables...
 - Hendrik Antoon **Lorentz** (1853 - 1928), physicien néerlandais, prix Nobel de physique en 1902 pour sa théorie électronique de la matière appliquée au magnétisme. Il est également connu pour la transformation et la force qui portent son nom. Il introduit le *facteur de Lorentz* β en 1895 comme le rapport de deux longueurs puis en 1904 comme le rapport de proportionnalité entre deux temps, dans le cadre d'une théorie (finalement rejetée) essayant d'interpréter le résultat négatif de l'expérience de **Michelson et Morley**. A ne pas confondre avec **Lorenz**. Ils entretenaient d'ailleurs des relations exécrables...
 - Ernst **Mach** (1838 - 1916), physicien autrichien. Il réalise le premier que si l'expérience de **Michelson et Morley** donne des résultats négatifs, c'est que le concept même de l'éther devait être remis en question.
 - James Clerk **Maxwell** (1831 - 1879), physicien britannique. Les équations éponymes de l'électromagnétisme qu'il introduit à partir de 1855 amènent à terme l'introduction de la relativité restreinte pour permettre leur écriture dans tous les référentiels d'inertie.

-
- Albert **Michelson** (1852 - 1931), physicien américain, prix Nobel de physique en 1907. Il réalise avec **Morley** entre 1881 et 1887 l'expérience d'interférométrie qui porte leurs noms et qui montre que l'éther n'est pas entraîné par la Terre. Il améliore considérablement la précision de la mesure de la vitesse de la lumière en 1927 et obtient $299\,796 \pm 4$ km/s à l'aide de miroirs tournants séparés de 35 km.
 - Hermann **Minkowski** (1864 - 1909), mathématicien balte, professeur de mathématiques d'**Einstein** à l'EPFZ. Il introduit en 1908 le formalisme quadridimensionnel en réunissant dans un continuum l'espace et le temps.
 - Edouard **Morley** (1838 - 1923), chimiste américain et expérimentateur de génie. Il s'associe avec **Michelson** en 1884 pour l'aider à mettre au point l'expérience qui porte désormais leurs noms et qui rejette la notion d'éther.
 - Boris **Podolsky** (1896 - 1966), physicien théoricien russe puis américain. Avec **Einstein** et **Rosen**, il énonce en 1935 le *paradoxe EPR*. En 1933, il débute avec Landau l'écriture du premier livre d'électromagnétisme démarrant par la relativité restreinte. Ce livre sera terminé par Landau et Lifshitz en 1951 et deviendra la *théorie classique des champs*.
 - Henri **Poincaré** (1854 - 1912), mathématicien et physicien français. Il publie en 1900 une procédure de synchronisation pour des horloges en repos les unes par rapport aux autres, quasi identique à celle publiée par **Einstein** en 1905 (ce dernier n'avait pas connaissance de ces travaux). Il développe également en 1905 une approche quadri-dimensionnelle similaire à celle de la relativité, mais n'ose pas la publier car trop innovante..
 - Ole **Rømer** (1644 - 1710), astronome danois. Il montre en 1676 une disparité dans l'apparition des éclipses du satellite Io de Jupiter, ce que **Huygens** interprète comme une preuve de la vitesse finie de la lumière.
 - Nathan **Rosen** (1918 - 1998), physicien américain. Avec **Einstein** et **Podolsky**, il énonce en 1935 le *paradoxe EPR*.
 - Bruno **Rossi** (1918 - 1993), physicien italien. Avec **Hall**, il réalise en 1940 l'expérience de confirmation de la dilatation des intervalles de temps à l'aide de la désintégration des muons (même si à l'époque ils pensaient qu'il s'agissait de mésons).
 - Georges **Sagnac** (1869 - 1928), physicien français. Opposant à la théorie de la relativité, il découvre en 1913 l'*effet Sagnac*, qu'il interprète à tort comme une preuve d'une faille de la théorie relativiste.
 - Willem **de Sitter** (1872 - 1934), astronome néerlandais. Il propose en 1913 une expérience pour vérifier la constance de la vitesse de la lumière, en se basant sur la variation de la luminosité des étoiles binaires.
 - J. **Smith**, physicien américain, assistant de **Frisch** avec lequel il réalise en 1963 une version améliorée de l'expérience de **Rossi et Hall**.
 - G. **Stilwell**, physicien américain, assistant d'**Ives**, avec lequel il réalise en 1938 l'expérience d'**Ives et Stilwell**.
 - Edward **Thorndike** (1874 - 1949), physicien américain. Il réalise en 1932 avec **Kennedy** une version améliorée de l'expérience de **Michelson et Morley**.

Bibliographie

- [1] C. Kittel, W. Knight et M. Ruderman, *Cours de physique de Berkeley - Mécanique*, Armand Colin, Paris, 1972.
- [2] C. Grossetête, *Relativité restreinte et structure atomique de la matière*, Ellipses, Paris, 1985.
- [3] M. Hulin, N. Hulin et L. Mousselin, *Relativité restreinte*, Dunod, Paris, 1992.
- [4] J. Smith, *Introduction à la Relativité*, InterEditions, Masson, Paris, 1997.
- [5] J.L. Bobin, *Introduction à la relativité*, Diderot Editeur, Paris, 1997.
- [6] J.P. Perez, *Relativité*, Dunod, Paris, 1999.
- [7] M.E. Berthon, *Comprendre la relativité*, TEC & DOC, Paris, 1999.
- [8] M. Lambert, *Relativité restreinte et électromagnétisme*, Ellipses, Paris, 2000.
- [9] S. Durand, *La relativité animée*, Belin, Paris, 2003.
- [10] D. Langlois *Introduction à la relativité*, Vuibert, Paris, 2011.
- [11] A. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013.
- [12] N. Pavloff, *Notes de cours de relativité restreinte*, L3 Paris-Saclay (2014-2023).

Chapitre 1

Contexte historique (*)

Sommaire

1.1	Lois de Newton, principe de relativité et transformation de Galilée (*)	1
1.2	Forme des équations de Maxwell par changement de référentiel d'inertie (*)	3
1.3	Quelques faits expérimentaux (*)	5

Introduction

Ce chapitre général permet de situer l'introduction de la relativité dans le contexte de l'époque. Les points qui y sont abordés ne seront pas vu en cours et ne seront pas exigible en tant que tel pour les examens.

1.1 Lois de Newton, principe de relativité et transformation de Galilée (*)

1.1.1 Lois de Newton

Newton publie en 1687 dans ces *Principia* un ensemble de lois connues sous le nom de *lois de Newton*. Dans leur énoncé, Newton parlait de *repos* et de *mouvement*. Il conçut un espace illimité, absolu, homogène, isotrope et euclidien, ainsi qu'une échelle de temps absolue.

1^{re} loi de Newton (principe d'inertie) : *Toute particule isolée, ne subissant l'action d'aucune force, reste au repos ou est animée d'un mouvement rectiligne uniforme*

En langage moderne, on peut interpréter ceci en disant que ce principe permet de caractériser les *référentiels d'inertie* (ou *référentiels galiléens*) en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

2^e loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) : *La force totale \vec{f} appliquée à une particule de masse m et d'accélération \vec{a} est donnée par :*

$$\vec{f} = m\vec{a} \tag{1.1}$$

Cette loi s'applique dans les référentiels inertiels. La masse m de cette relation est appelée la *masse d'inertie*.

3^e loi de Newton (principe de l'action et de la réaction) : *Quand deux corps (1) et (2) interagissent, les forces $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$ mises en jeu vérifient au même instant :*

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$$

Ceci suppose implicitement une transmission instantanée des signaux. En particulier, ceci est faux pour l'électromagnétisme.

4^e loi de Newton (loi de la gravitation) : Deux particules de masse m_1 et m_2 s'attirent avec une force dirigée selon l'axe qui les relie et dont le module vaut :

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

où G est la *constante de gravitation*¹. Cette loi suppose également qu'à chaque instant, la particule (2) "sait" où se trouve la particule (1) au même instant. La loi de la gravitation sera modifiée par la théorie de la relativité générale.

1.1.2 Principe de relativité

Plus précisément, on appellera *référentiel d'inertie* ou *référentiel galiléen* un référentiel où toute particule libre, soumis à l'action d'aucune force, est soit au repos, soit animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

Le *principe de relativité* en physique classique s'énonce généralement sous la forme :

Tous les référentiels d'inertie sont équivalents et les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel d'inertie

même s'il n'en existe pas d'énoncé précis. Une conséquence importante est qu'on ne peut pas définir de vitesse absolue mais uniquement des vitesses relatives.

On suppose de plus que dans tout référentiel d'inertie :

- Le temps est uniforme. Il y a invariance par translation dans le temps. Pour un système isolé, ceci est associé à la conservation de l'énergie.
- L'espace est homogène. Il y a invariance par translation dans l'espace. Pour un système isolé, ceci est associé à la conservation de la quantité de mouvement.
- L'espace est isotrope. Il y a invariance par rotation dans l'espace. Pour un système isolé, ceci est associé à la conservation du moment cinétique.

1.1.3 Transformation de Galilée

La *transformation de Galilée* donne l'expression des coordonnées dans un changement de référentiel d'inertie en physique classique. Elle se base sur le postulat qu'une seule horloge suffit pour mesurer le temps dans tous les référentiels d'inertie. Si les deux référentiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') sont animés l'un par rapport à l'autre de la vitesse d'entraînement \vec{u} orientée selon l'axe Ox (Figure 1.1), on aura, en supposant que les origines de (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') coïncident à $t = 0$:

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.2)$$

On a introduit ici le temps pour anticiper ce dont on aura besoin en relativité, même si la véritable *transformation de Galilée* ne le fait pas apparaître.

On déduit de (1.2) la *loi de transformation des vitesses* et la *loi de transformation des accélérations* :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{a}' = \vec{a} \quad (1.3)$$

Cette dernière relation, par application du principe fondamental de la dynamique et du principe de relativité, entraîne l'invariance de la force par changement de référentiel d'inertie, qui est donc une conséquence directe de la transformation de Galilée.

1. A priori, la *masse gravitationnelle* introduite ici n'est pas identique à la masse d'inertie introduite par la 2^e loi de Newton. On peut montrer que ces deux masses sont proportionnelles (historiquement, ceci a été montré par Eötvös dont l'expérience est décrite par exemple dans [6, page 206]). On peut donc les choisir égales par un choix adéquat du système d'unité. Ceci revient à prendre pour valeur de la constante de gravitation $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$. A la précision des expériences actuelles, la masse gravitationnelle est égale à la masse inertielle, à mieux que 10^{-10} près.

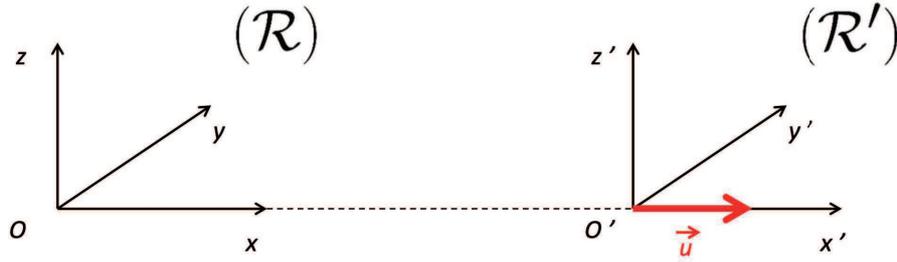


FIGURE 1.1 – Déplacement de deux référentiels d'inertie l'un par rapport à l'autre à la vitesse d'entraînement constante \vec{u} .

La transformation inverse, correspondant au passage du référentiel (\mathcal{R}') au référentiel (\mathcal{R}) , animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $-\vec{u}$ par rapport à (\mathcal{R}') , est donnée par :

$$\begin{cases} t &= t' \\ x &= x' + ut' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque : En prenant une notation matricielle qu'on utilisera parfois dans ce cours, on peut introduire les matrices \mathcal{M} et \mathcal{M}^{-1} telles que :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

on a alors :

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} t' \\ \vec{r}' \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

en notant $\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ et $\vec{r}' = x'\vec{u}_x + y'\vec{u}_y + z'\vec{u}_z$ les vecteurs positions dans (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') .

1.2 Forme des équations de Maxwell par changement de référentiel d'inertie (*)

En notant $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{J}(\vec{r}, t)$ les densités respectives de charges et de courants volumiques, la forme locale des équations de **Maxwell** dans le vide s'écrit en fonction des champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell – Gauss ou (MG)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{Conservation du flux magnétique ou (M}\Phi) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell – Faraday ou (MF)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Maxwell – Ampère ou (MA)} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

en fonction des deux constantes universelles $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m (*permittivité diélectrique du vide*) et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (*perméabilité magnétique du vide*). Ces équations sont écrites dans un référentiel d'inertie et montrent qu'il existe une valeur constante $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ pour la vitesse de la lumière dans ce référentiel.

On considère les deux référentiels d'inertie (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') de la Figure 1.1 et on note \vec{u} la vitesse d'entraînement de (\mathcal{R}') par rapport à (\mathcal{R}) .

On peut facilement montrer un certain nombre de "problèmes" qui apparaissent lorsqu'on cherche à changer de référentiel en électromagnétisme en utilisant la transformation de Galilée :

1. En postulant la conservation de la charge lors d'un changement de référentiel d'inertie, l'égalité des forces de **Lorentz** dans les deux référentiels (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') permet d'écrire que $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}'$. La composition classique des vitesses ($\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$) entraîne que :

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{u} \times \vec{B}' \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}' \quad (1.8)$$

qui est la *loi de transformation classique des champs*.

La relation $\vec{B} = \vec{B}'$ est en fait impossible à accepter si on pense au cas d'un électron en mouvement rectiligne uniforme. Cette conséquence logique, mais absurde, de la transformation de Galilée montre bien incompatibilité de l'électromagnétisme et de la physique classique, même à la limite des basses vitesses car on n'a rien supposé sur la vitesse de l'électron.

2. La transformation classique des champs (1.8) permet d'écrire :

$$E_x = E'_x \quad E_y = E'_y + u B'_z \quad E_z = E'_z - u B'_y$$

La composition classique des positions se traduit par :

$$t = t' \quad x = x' + u t' \quad y = y' \quad z = z'$$

On relie les dérivées par rapport à x et t à celles par rapport à x' et t' . Les variables x et t sont a priori fonctions de x' et t' , tandis que y et z ne le sont pas. On en déduit que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} \quad (1.9)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \quad (1.10)$$

A l'aide de ces relations, on peut étudier les transformations des quatre équations de **Maxwell**.

On a par exemple, pour (MG) :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E'_x}{\partial x'} \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + u \frac{\partial B'_z}{\partial y'} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E'_z}{\partial z'} - u \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \quad (1.11)$$

ou encore :

$$\vec{\nabla}_{(\mathcal{R})} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla}_{(\mathcal{R}')} \cdot \vec{E}' + u \left(\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} \right)$$

qui montre que (MG) n'est pas invariante par changement de référentiel d'inertie. Par contre, (1.8) entraîne également que $\vec{B} = \vec{B}'$, soit :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} \quad \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B'_y}{\partial y'} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B'_z}{\partial z'}$$

qui montre que (MΦ) est invariante par changement de référentiel d'inertie. On pourrait de même montrer que (MF) est invariante par changement de référentiel d'inertie, tandis que (MA) ne l'est pas.

Comme ce résultat est contraire au principe de relativité, ceci semble indiquer qu'il existe un référentiel d'inertie particulier (\mathcal{R}_e), dans lequel les équations de **Maxwell** ont la forme (1.7). Les physiciens du 19^e siècle ont donc supposé l'existence d'un milieu, l'*éther*, qui aurait été le support des ondes électromagnétiques. Dans tout autre référentiel inertiel (\mathcal{R}), la vitesse de la lumière devrait vérifier d'après (1.3) :

$$\vec{c} = \vec{c}_{\mathcal{R}_e} - \vec{v}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_e}$$

1.3 Quelques faits expérimentaux (*)

Avant l'introduction de la relativité, les résultats de certaines expériences étaient impossible à expliquer. Certaines d'entre elles sont listées dans ce paragraphe et on verra plus tard que leur interprétation sera fournie par la relativité restreinte.

Avant 1905, on sait par exemple que la vitesse de la lumière est finie (§ 1.3.1) mais que la loi de composition des vitesses ne s'applique pas (§ 1.3.2). On sait également que les équations de **Maxwell** ne conservent pas leur forme lors d'un changement de référentiel. Ceci semble possible s'il existe un référentiel particulier, l'éther. Mais l'expérience de **Michelson** et **Morley** (§ 1.3.3) semble indiquer le contraire. Enfin, des électrons rapides se comportent comme des électrons dont on remplace la masse m par $m \times 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (§ 1.3.4).

1.3.1 Mesure de la vitesse de la lumière

Un certain nombre d'expériences de plus en plus précises on permis de montrer au cours des années que la vitesse de la lumière était finie :

1. En 1676, **Røemer** a noté précisément les instants de disparition et d'apparition du satellite Io autour de Jupiter. Il a constaté un écart maximum de 22' entre les observations d'éclipses à six mois d'intervalle, ce que **Huygens** a attribué au temps nécessaire pour que la lumière traverse avec une vitesse finie le diamètre de l'orbite terrestre, puisqu'en une année, Jupiter ne se déplaçait pas trop sur son orbite. **Huygens** a ainsi obtenu $c \approx 220\,000$ km/s.
2. En 1849, **Fizeau** utilise une roue dentée tournant à vitesse constante vers laquelle des rayons lumineux passant entre les dents sont réfléchis par un miroir. L'expérience a été effectuée entre le sommet de sa maison sur le Mont Valérien à Suresnes et un atelier à Montmartre, à 8,6 km. Un décalage d'une demi-dent de la roue au retour du rayon occulte la lumière, ce qui permet de connaître la vitesse de la lumière, connaissant la distance et la vitesse de rotation de la roue. **Fizeau** a ainsi obtenu une vitesse de $315\,000 \pm 500$ km/s.
3. Dès 1850, **Foucault** perfectionne le système de Fizeau à l'aide de miroirs tournants et montre en 1862 que la vitesse de la lumière vaut plutôt $298\,000 \pm 500$ km/s.
4. De 1878 à 1926, **Michelson** améliore encore le système et mesure en 1927 une vitesse de $299\,796 \pm 4$ km/s à l'aide de miroirs tournants séparés de 35 km, entre l'observatoire du Mont Wilson et le Mont San Antonio, en Californie.

1.3.2 Mesure d'entraînement de la lumière par de l'eau en mouvement

Cette expérience réalisée par **Fizeau** date de 1851. A l'époque, on cherchait à savoir si un corps en mouvement entraînait l'éther. L'expérience consiste à utiliser un faisceau lumineux pouvant se propager à l'intérieur d'un liquide en mouvement par rapport au laboratoire (Figure 1.2).

Un faisceau de lumière monochromatique se propage dans le liquide en mouvement. En inclinant les miroirs M_1M_2 , le système de franges d'interférence observé en M se déplace latéralement. Si le liquide est au repos dans le laboratoire, la vitesse de la lumière dans le liquide est $v' = c/n$ où n est l'indice du fluide.

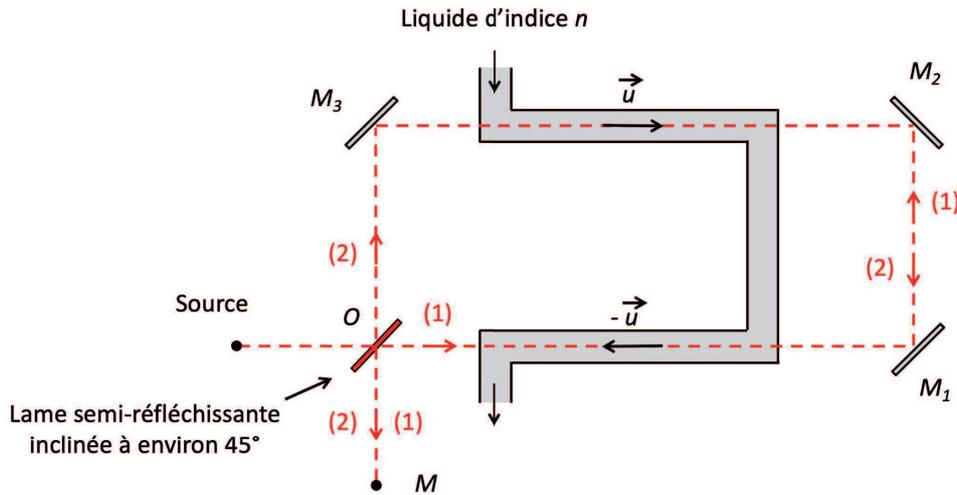
L'interprétation classique de l'expérience de **Fizeau** repose sur le fait que suivant le sens de la vitesse d'entraînement du liquide \vec{u} par rapport au laboratoire, la vitesse de la lumière par rapport au laboratoire doit être :

$$v_+ = v' + u \quad \text{ou} \quad v_- = v' - u \quad (1.12)$$

conformément à la transformation classique des vitesses. En fait, **Fizeau** a cherché le coefficient k tel que :

$$v_+ = v' + k u \quad \text{ou} \quad v_- = v' - k u \quad (1.13)$$

Ce coefficient de couplage à l'éther doit valoir 1 si l'éther est complètement entraîné (conformément à la transformation de Galilée) ou 0 si l'éther n'est pas entraîné, toute autre valeur intermédiaire étant a priori exclue. La mesure de k se fait en inversant le sens de parcours du fluide. Expérimentalement, en prenant


 FIGURE 1.2 – Schéma de l'expérience de **Fizeau**.

comme fluide de l'eau ou du benzène, **Fizeau** a obtenu un coefficient k compris entre 0 et 1 et a remarqué (sans justification) que ces valeurs étaient en fait données par :

$$k = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Ce résultat, indiquant un *entraînement partiel de l'éther*, avait été prédit par **Fresnel** en 1818. Mais en 1851, la théorie de **Fresnel** n'avait plus cours. Au final, le résultat de l'expérience de **Fizeau** est resté incompris pendant de nombreuses années.

1.3.3 Expérience de Michelson et Morley

Principe

Cette expérience, réalisée par **Michelson** et **Morley**, cherchait à mettre en évidence l'effet du mouvement de la Terre sur la vitesse de la lumière mesurée sur Terre et devait prouver la validité de la notion d'éther. Elle a démarré en 1881 et ne fut réalisée avec la sensibilité requise qu'en 1887².

Elle comprend un interféromètre à deux bras (Figure 1.3), dont l'un est orienté suivant le sens de la Terre sur son orbite à la vitesse orbitale \vec{u} . L'ensemble baigne sur un bac de mercure pour pouvoir tourner et échanger les rôles des miroirs M_1 et M_2 (Figure 1.4).

On observe sur l'écran une figure d'interférence puisque les deux faisceaux qui interfèrent sont cohérents. On notera L la longueur commune des deux bras de l'interféromètre. On suppose (et c'est l'hypothèse de base de cette expérience) que la vitesse c de la lumière est constante et isotrope dans le référentiel lié à l'éther et donc que :

$$\vec{c}_{Lum/Terre} = \vec{c}_{Lum/Ether} - \vec{u}_{Terre/Ether} \quad (1.14)$$

On suppose tout d'abord que le bras (2) est orienté dans la direction de $\vec{u} = \vec{u}_{Terre/Ether}$. On note t_2 le temps mis par la lumière pour effectuer le trajet OM_2O . On a $t_2 = t'_2 + t''_2$, où t'_2 et t''_2 correspondent respectivement à OM_2 et M_2O .

A l'aide des notations de la Figure 1.5, on voit que :

$$\begin{cases} ct'_2 = L - ut'_2 \Rightarrow t'_2 = \frac{L}{c+u} \\ ct''_2 = L + ut'_2 \Rightarrow t''_2 = \frac{L}{c-u} \end{cases} \quad (1.15)$$

2. A. Michelson et E. Morley, *On the relative motion of the earth and the luminiferous ether*, American Journal of Science **34**, 333 (1887).

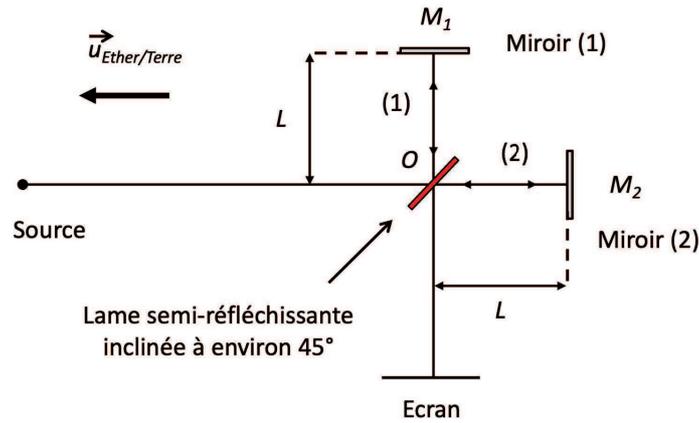


FIGURE 1.3 – Schéma de l'expérience de **Michelson** et **Morley**.

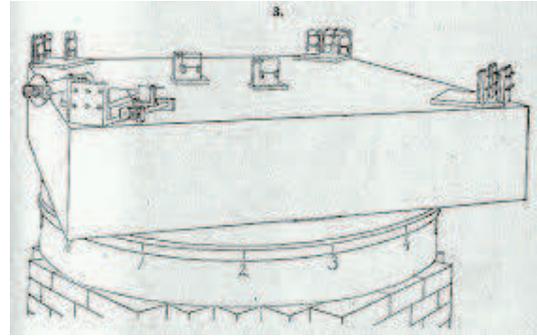
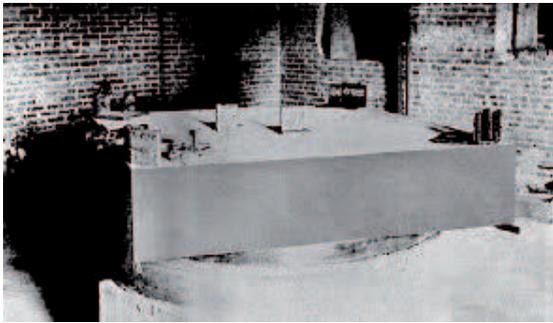


FIGURE 1.4 – Photographie et schéma de l'expérience de **Michelson** et **Morley**, flottant sur son bain de mercure.

d'où finalement :

$$t_2 = \frac{L}{c+u} + \frac{L}{c-u} = \frac{2Lc}{c^2-u^2} = \frac{2L/c}{1-u^2/c^2}$$

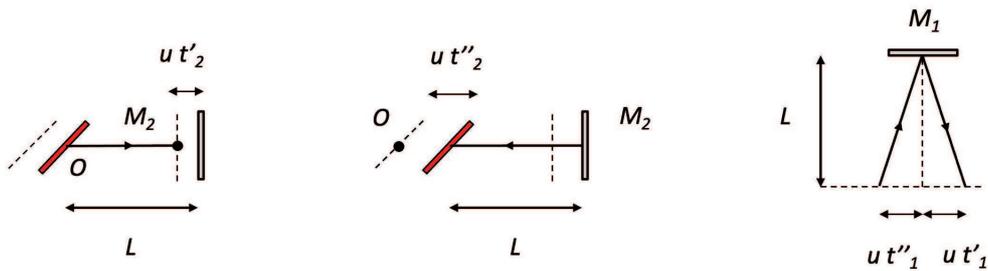


FIGURE 1.5 – Notations utilisées pour interpréter l'expérience de **Michelson** et **Morley**.

Toujours d'après les notations de la Figure 1.5, on voit que les temps "aller" et "retour" t'_1 et t''_1 sont égaux et vérifient :

$$ct'_1 = ct''_1 = \sqrt{L^2 + (ut'_1)^2} \quad \text{soit} \quad t_1 = t'_1 + t''_1 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Comme $u \approx 3 \cdot 10^4 \text{ ms}^{-1}$, on a $u/c \approx 10^{-4}$. On a alors :

$$t_1 \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} + \dots \right) \quad \text{et} \quad t_2 \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{u^2}{c^2} + \dots \right)$$

En pratique, on incline légèrement un des miroirs, ce qui revient à faire la figure d'interférence d'un coin d'air : un retard sur l'une des branches se traduit par un déplacement latéral des franges. En tournant l'ensemble de 90° , les bras (1) et (2) changent de rôles et le système de franges devrait se déplacer.

Comme $u \approx 3 \cdot 10^4 \text{ ms}^{-1}$, on a $u/c \approx 10^{-4}$. La différence de marche δ entre les deux faisceaux vaut donc :

$$\delta = c \Delta t \quad \text{avec} \quad \Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{L u^2}{c^3} \quad \text{soit} \quad \delta \approx \frac{L u^2}{c^2}$$

En tournant l'appareil de 90° , la variation totale attendue Δp de l'ordre d'interférence δ/λ était donc :

$$\Delta p = 2 \frac{\delta}{\lambda} = 2 \frac{L u^2}{\lambda c^2}$$

Avec $L \approx 10 \text{ m}$ et une longueur d'onde $\lambda \approx 0,5 \mu\text{m}$, la variation attendue de l'ordre d'interférence était donc $\Delta p \approx 0,4$. L'appareil étant sensible au centième d'interfrange, un déplacement de 0,4 interfrange était observable.

Résultats

Michelson et **Morley** n'ont jamais rien observé. A l'époque, ce résultat a été considéré par leurs auteurs comme un échec.

Lorentz³ et **Poincaré** ont développé une théorie qui tentait d'expliquer pourquoi l'éther était indétectable, mais elle a finalement été abandonnée. Ce n'est qu'avec le temps que les gens (**Mach** a été le premier à le faire) ont réalisés la signification profonde de ce résultat. L'hypothèse que la Terre entraînait l'éther devait être abandonnée.

Confirmation ultérieure : l'expérience de Kennedy et Thorndike

La confirmation définitive du résultat négatif de l'expérience de **Michelson** et **Morley** a été réalisée en 1932 par **Kennedy** et **Thorndike**⁴, dans laquelle les techniques expérimentales étaient plus poussées. Les principales différences entre cette expérience et celle de **Michelson** et **Morley** étaient essentiellement d'ordre technique, de manière à limiter au maximum les sources d'erreurs systématiques :

- la stabilité en température était assurée à mieux que 1 mK.
- les miroirs étaient maintenus par un dispositif en quartz, pour limiter les effets de dilatation et de magnétostriction.
- les bras de l'interféromètre n'étaient plus perpendiculaires et n'avaient plus la même longueur.

Toutes les mesures montrèrent des décalages inférieurs à 0,00005 franges, compatibles avec un décalage nul. Cette expérience établit de manière définitive l'invariance et l'isotropie de la vitesse de la lumière dans le vide.

L'expérience a été refaite en 1979 par **Brillet** et **Hall**⁵ qui ont montré que l'isotropie de la vitesse de la lumière est meilleure que $3 \cdot 10^{-15}$.

1.3.4 Expérience de Kaufmann

Le rayon de courbure ρ d'une particule de charge q et de quantité de mouvement \vec{p} soumise à un champ \vec{B} constant est $\rho = p/(qB) = m c/(qB) \times \beta$ dans le plan orthogonal au champ \vec{B} . En 1901, **Kaufmann** a voulu vérifier cette relation pour des électrons rapides. Il a trouvé que ρ n'était pas proportionnel à β mais à $\gamma \beta$, c'est-à-dire que tout se passait comme si la masse m était remplacée par γm .

3. Vous trouverez plus de détails dans [8, page 45].

4. R. Kennedy et E. Thorndike, *Experimental Establishment of the Relativity of Time*, *Physical Review* **42**, 400-418 (1932).

5. A. Brillet et J.L. Hall, *Improved Laser Test of the Isotropy of Space*, *Physical Review Letters* **42**, 549-552 (1979).