Exo 2 : quadrivecteur d'onde

Transformation de $\vec{k}$

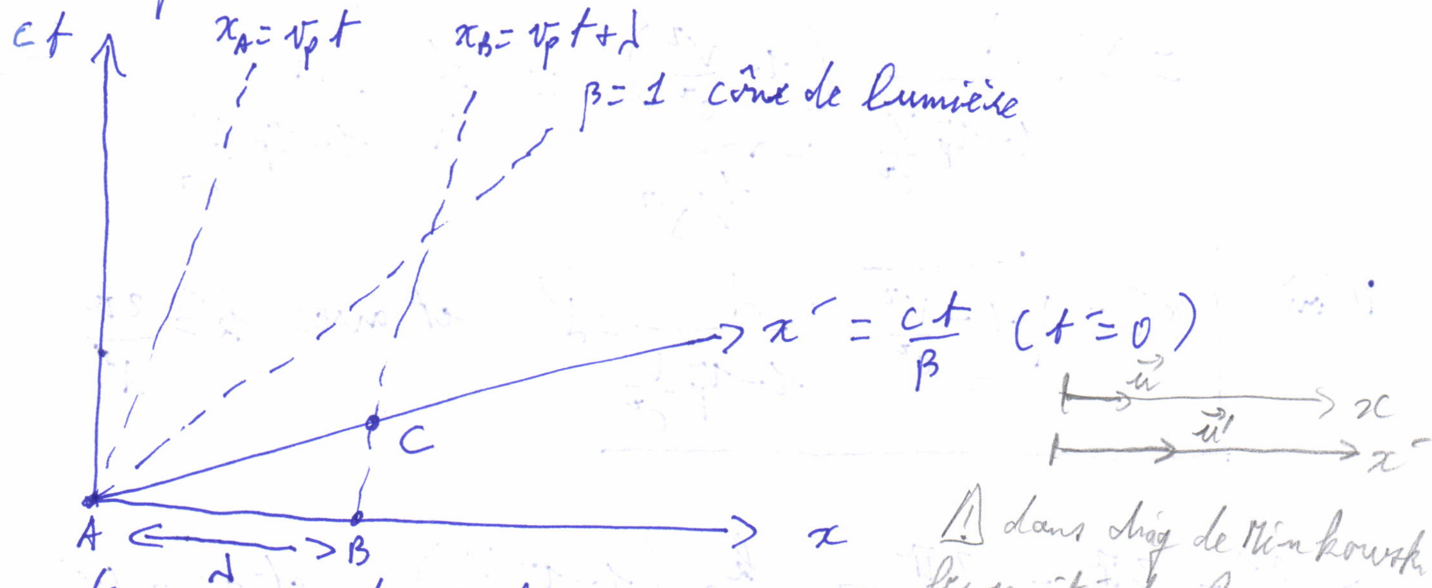


diagramme de Minkowski

⚠ dans diag de Minkowski les unités de longueur sur x' et ct' sont plus grandes que sur x et ct

Dans R' on a d' distance entre A et C (distance entre les crêtes aux instants $t'_A = t'_C = 0$)

Coordonnée de C dans R' ?

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} ct'_C \\ x'_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct_C \\ x_C \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x'_C = \gamma(x_C - \beta c t_C) \qquad \text{avec } \beta = \frac{V}{c}$$

Il faut exprimer x_C et t_C dans R

$$t'_C = \gamma\left(t_C - \beta \frac{x_C}{c}\right) \quad \text{or ici } t'_C = 0 \rightarrow t_C = \frac{\beta x_C}{c} = \frac{V}{c^2} x_C$$

On a aussi $x_C = v_p t_C + d$ (ligne d'univers de la crête B dans R) soit $x_C = v_p \frac{V}{c^2} x_C + d$

$$\rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{d}{1 - v_p \frac{V}{c^2}} \\ t_C = \dfrac{V}{c^2} x_C \end{cases}$$

On a donc

$$x'_c = d' = \gamma(x_c - V t_c) = \gamma x_c \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$= \gamma \frac{d}{1 - v_p \frac{V}{c^2}} \underbrace{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}_{1/\gamma^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{1 - v_p \frac{V}{c^2}}$$

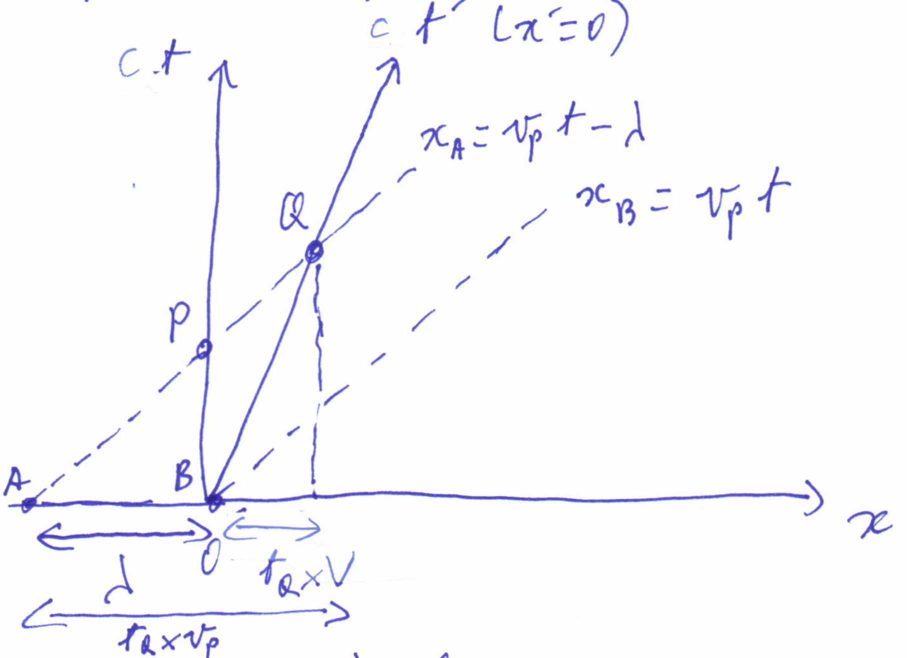
D'où $\boxed{x'_c = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \; \frac{d}{1 - v_p \frac{V}{c^2}} = d'}$ et avec $k = \frac{2\pi}{d}$

$$\to k' = \frac{2\pi}{d'} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{k}{2\pi}\left(1 - v_p \frac{V}{c^2}\right) \quad \text{et } v_p = \frac{\omega}{k}$$

$$\to \boxed{k' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left(k - \frac{V}{c}\frac{\omega}{c}\right) = \gamma\left(k - \beta \frac{\omega}{c}\right)}$$

Résultat attendu de la transformation de Lorentz du quadrivecteur $\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$

Pour la partie temporelle $\frac{\omega}{c}$ on cherche à présent à faire le calcul en un pt fixe $x' = 0$



ici on a pris $V < v_p$

Diagramme de Minkowski

Dans (R') les évènements O et Q ont lieu au même point $x' = 0$. On a que $T' = t'_Q$

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} c\,t_Q = \dfrac{c\,d}{v_p - V} \\ x_Q = \dfrac{V d}{v_p - V} \end{pmatrix}$$

avec $x_Q = v_p t_Q - d$

et $t_Q v_p = d + t_Q V$

$$\underline{Q'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \underline{Q}$$

$$\rightarrow t'_Q = \gamma \frac{d}{v_p - V}\left(1 - \beta \frac{V}{c}\right) = T' = \frac{2\pi}{\omega'}$$

$$\rightarrow \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{v_p - V}{\gamma} \underbrace{\frac{2\pi}{d}}_{k} \underbrace{\frac{1}{1-\beta^2}}_{\gamma^2} = \gamma k (v_p - V)$$

et $\beta = \frac{V}{c}$ et $v_p = \frac{\omega}{k}$

$$\rightarrow \omega' = \gamma k \left(\frac{\omega}{k} - \beta c\right) \text{ soit } \boxed{\frac{\omega'}{c} = \gamma\left(\frac{\omega}{c} - \beta k\right)}$$