faire cette version

Paradoxe de la règle et du trou

Dans le ref (R) Appelons L_R = longueur de la règle dans (R)

L_T = ——— du trou dans (R′)

Comparons la taille de la règle dans (R) avec la taille du trou.

La règle a une longueur propre $L_0 = x'_{R_2} - x'_{R_1}$ mesurée dans (R′)

Calculons L_R dans (R) $L_R = x_{R_2} - x_{R_1}$

La mesure dans (R) doit être faite pour $t_{R_2} = t_{R_1}$

On a $\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$

soit $x' = \gamma(-\beta ct + x)$

d'où $L_0 = x'_{R_2} - x'_{R_1} = \gamma(-\beta c t_{R_2} + x_{R_2}) - \gamma(-\beta c t_{R_1} + x_{R_1})$

or $t_{R_2} = t_{R_1} \rightarrow L_0 = \gamma(x_{R_2} - x_{R_1}) = \gamma L_R$

soit $L_R = \dfrac{L_0}{\gamma}$ la longueur de la règle dans (R) est inférieur à la longueur du trou (diamètre du trou) dans (R) qui est de L_0 → la règle passe dans le trou.

Dans (R′) la règle est immobile et a pour longueur L_0

Le trou est ~~en~~ mouvement. Les coord de ses extrémitées sont mesurées au m̂ instant t'_{T_1} et t'_{T_2}

On a $\left.\begin{array}{l} x_{T_2} = \gamma(\beta c t'_{T_2} + x'_{T_2}) \\ x_{T_1} = \gamma(\beta c t'_{T_1} + x'_{T_1}) \end{array}\right\} \rightarrow x_{T_2} - x_{T_1} = L_0 = \gamma(x'_{T_2} - x'_{T_1}) = \gamma L_T$

$L_T = \frac{L_0}{\gamma}$ la longueur du trou dans (R') est < à L_0 la longueur de la règle → paradoxe.

Regardons les positions y'_{T_1} et y'_{T_2} dans (R') au m̂ instant

$$y'_{T_1} = y_{T_1} = u\, t_{T_1} = u\left(\frac{t'_{T_1}}{\gamma} + \frac{\beta}{c} x_{T_1}\right)$$

$$y'_{T_2} = y_{T_2} = u\, t_{T_2} = u\left(\frac{t'_{T_2}}{\gamma} + \frac{\beta}{c} x_{T_2}\right)$$

avec $ct' = \gamma(ct - \beta x) \rightarrow t = \frac{t'}{\gamma} + \frac{\beta}{c} x$

or $t'_{T_1} = t'_{T_2} = t'_T$ et $x_{T_1} = -\frac{L_0}{2}$ et $x_{T_2} = +\frac{L_0}{2}$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} y'_{T_1} &= u\left(\frac{t'_T}{\gamma} - \frac{\beta}{c}\frac{L_0}{2}\right) \\ y'_{T_2} &= u\left(\frac{t'_T}{\gamma} + \frac{\beta}{c}\frac{L_0}{2}\right)\end{aligned}\right\} \quad y'_{T_1} < y'_{T_2}$$

le trou paraît penché dans (R')

Pour avoir les trajectoires de T_1 et T_2 dans (R') il faut éliminer le temps. Exprimons t' en fct de x et x'

$$x = \gamma(\beta c t' + x') \rightarrow t' = \frac{1}{\beta c}\left(\frac{x}{\gamma} - x'\right)$$

$$\rightarrow t'_{T_1} = \frac{1}{\beta c}\left(\frac{x_{T_1}}{\gamma} - x'_{T_1}\right) = -\frac{1}{V}\left(\frac{L_0}{2\gamma} + x'_{T_1}\right)$$

$$t'_{T_2} = \frac{1}{\beta c}\left(\frac{x_{T_2}}{\gamma} - x'_{T_2}\right) = \frac{1}{V}\left(\frac{L_0}{2\gamma} - x'_{T_2}\right)$$

à mettre dans y'_{T_1} et y'_{T_2}

$$\rightarrow y'_{T_1} = -\frac{u}{\gamma V}\left(\frac{L_0}{2\gamma} + x'_{T_1}\right) - \frac{u\beta}{c}\frac{L_0}{2} = -\frac{u\, x'_{T_1}}{\gamma V} - \frac{L_0}{2V}\left(\frac{u\beta V}{c} + \frac{u}{\gamma^2}\right)$$

$$= -\frac{u\, x'_{T_1}}{\gamma V} - \frac{L_0 u}{2V}\underbrace{\left(\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right)}_{1-\beta^2+\beta^2=1} \quad \text{soit } y'_{T_1} = -\frac{u}{V}\left(\frac{x'_{T_1}}{\gamma} + \frac{L_0}{2}\right)$$

De m̂ $\quad y'_{T_2} = -\frac{u}{V}\left(\frac{x'_{T_2}}{\gamma} - \frac{L_0}{2}\right)$

on aura $\begin{cases} y'_{T_1} = 0 \ (T_1 \text{ sur l'axe } Ox') \text{ pour } x'_{T_1} = -\frac{L_0\gamma}{2} \\ y'_{T_2} = 0 \ (T_2 \text{ ——— }) \text{ — } x'_{T_2} = \frac{L_0\gamma}{2} \end{cases}$

Lorsque $y'_{T_1} = 0$, $x'_{T_1} = -\frac{L_0\gamma}{2}$ soit $t'_{T_1} = -\frac{1}{V}\left(\frac{L_0}{2\gamma} - \frac{L_0\gamma}{2}\right)$

$$t'_{T_1} = -\frac{L_0}{2V}\underbrace{\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)}_{\frac{1-\gamma^2}{\gamma} = -\frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma} = -\beta^2\gamma} = \frac{L_0\beta^2\gamma}{2V} = \frac{L_0 V\gamma}{2c^2}$$

Au m̂ moment $t'_{T_2} = t'_{T_1} = \frac{L_0 V\gamma}{2c^2}$ on aura :

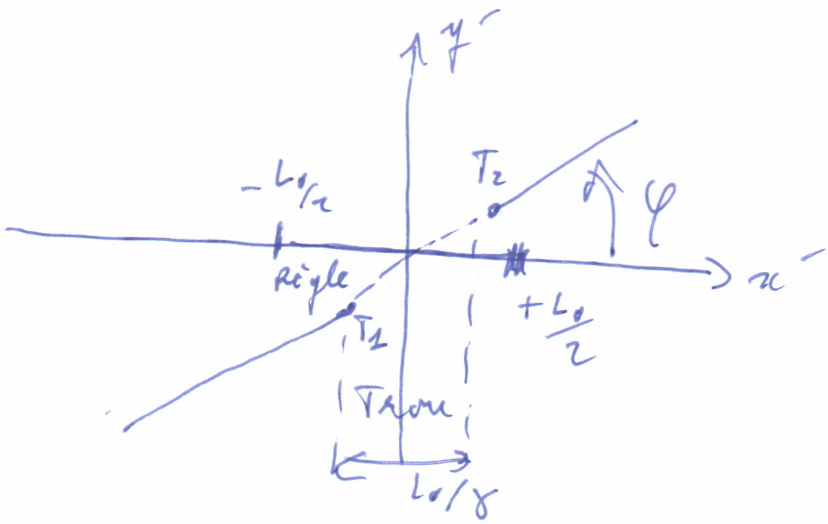
$+\frac{L_0}{2} = x_{T_2} = \gamma\left(+\beta c\,\frac{L_0 V\gamma}{2c^2} + x'_{T_2}\right)$ soit $x'_{T_2} = \frac{L_0}{2\gamma} - \beta\frac{V}{c}\frac{L_0}{2}\gamma$

et donc $x'_{T_2} = \frac{L_0}{2}\gamma\left(\frac{1}{\gamma^2} - \beta^2\right) = \frac{L_0\gamma}{2}(1-2\beta^2)$

et $y'_{T_2} = -\frac{u}{V}\left[\frac{1}{\gamma}\frac{L_0\gamma}{2}(1-2\beta^2) - \frac{L_0}{2}\right] = +L_0\beta^2\frac{u}{V}$

$$= L_0\frac{uV}{c^2}$$

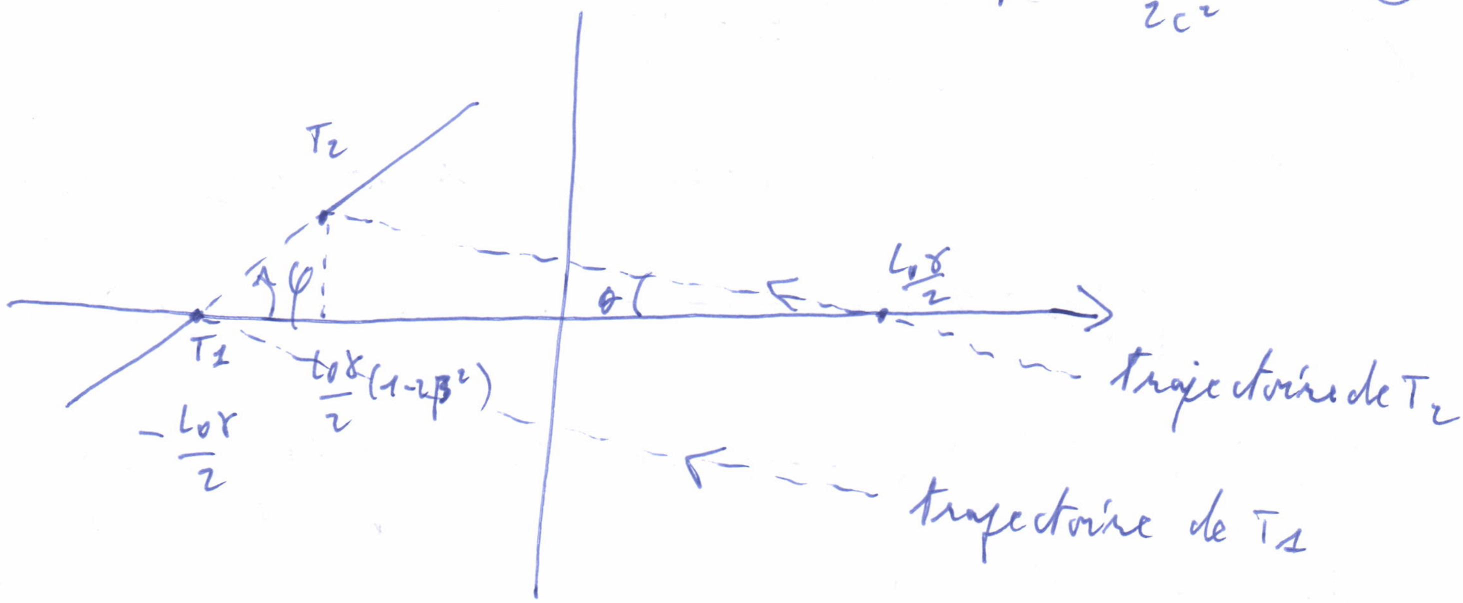
A $t' = 0$ on a :



pas à l'échelle

y' en $\frac{u}{V} \ll 1$

Pour $t'_{T_2} = t'_{T_1} = \frac{L_0 V \gamma}{2c^2}$ (4)



$$tg\,\theta = \frac{y'_{T_2} - y'_{T_1}}{\left|x'_{T_2} - \frac{L_0\gamma}{2}\right|} = \frac{y'_{T_2}}{\left|x'_{T_2} - \frac{L_0\gamma}{2}\right|} = \frac{\frac{uV}{c^2} L_0}{\left|\frac{L_0\gamma}{2}(1-2\beta^2) - \frac{L_0\gamma}{2}\right|} = \frac{uV}{c^2\gamma\beta^2}$$

$$tg\,\theta = \frac{u}{\gamma V}$$

lorsque $V \nearrow$ $\gamma \nearrow$ $tg\,\theta \searrow$ $\theta \searrow$
la trajectoire passe de verticale si $V \ll c$
à horizontale lorsque $V \sim c$

$$tg\,\varphi = \frac{y'_{T_2} - y'_{T_1}}{x'_{T_2} - x'_{T_1}} = \frac{\frac{uV}{c^2} L_0}{\frac{L_0\gamma}{2}(1-2\beta^2) + \frac{L_0\gamma}{2}} = \frac{\gamma u V}{c^2}$$

lorsque $V \nearrow$ $\gamma \nearrow$ $tg\,\varphi \nearrow$ le trou passe de horizontal lorsque $V \ll c$ à vertical lorsque $V \sim c$