Exo 2 Mvt à accélération propre constante. (1)

0/ Préliminaire (nouvelle version 2022)

a) $\gamma_p = f(t)$ car $v = f(t)$ ici

⚠ a priori $\gamma_p \neq \gamma$ changement de ref.

$$\underset{\sim}{A} = \frac{d\underset{\sim}{U}}{dt_0} = \frac{d\underset{\sim}{U}}{d\tau} \quad \text{avec } \underset{\sim}{U} = (\gamma_p c, \gamma_p \vec{v}) \text{ et } (t_0 \equiv \tau)$$

Rappelons que $\underset{\sim}{U} = \frac{d\underset{\sim}{X}}{d\tau}$ avec $\underset{\sim}{X} = (ct, \vec{r})$

et $dt = \gamma_p dt_0 = \gamma_p d\tau$

$$\rightarrow \frac{d\underset{\sim}{X}}{d\tau} = \gamma_p \frac{d\underset{\sim}{X}}{dt} = \gamma_p (c, \vec{v})$$

(On rappelle de $\frac{ds}{c} = d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ voir démonstration dans l'exo transformation des vitesses et γ = fct de la vitesse instantanée)

De même $\underset{\sim}{A} = \frac{d\underset{\sim}{U}}{d\tau} = \gamma_p \frac{d\underset{\sim}{U}}{dt} = \gamma_p \left(\frac{d(\gamma_p c)}{dt}, \frac{d(\gamma_p \vec{v})}{dt} \right)$

A une dimension on a $\underset{\sim}{A} = \gamma_p \left(\frac{d(\gamma_p c)}{dt}, \frac{d(\gamma_p v)}{dt} \right)$

$$\frac{d(\gamma_p c)}{dt} = c \frac{d\gamma_p}{dt}$$

$$\frac{d(\gamma_p v)}{dt} = \gamma_p \frac{dv}{dt} + v \frac{d\gamma_p}{dt}$$

et $\frac{d\gamma_p}{dt} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \left(-\frac{1}{c^2}\right) \frac{dv^2}{dt} = \frac{\gamma_p^3}{2c^2} \frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \frac{\gamma_p^3}{c^2} \vec{v}\cdot\vec{a}$

$$= \frac{\gamma_p^3}{c^2} v \frac{dv}{dt} \text{ à 1D}$$

$$\rightarrow \underset{\sim}{A} = \gamma_p \left(\gamma_p^3 \beta_p \frac{dv}{dt}, \gamma_p \frac{dv}{dt} + \gamma_p^3 \beta_p^2 \frac{dv}{dt} \right) = \gamma_p^4 \frac{dv}{dt} \Big(\beta_p, \underbrace{\frac{1}{\gamma_p^2} + \beta_p^2}_{1}\Big)$$

$$= \gamma_p^4 \frac{dv}{dt} \left(\frac{v}{c}, 1 \right)$$

Si on ne se limite pas à 1D on a :

$$\frac{d(\gamma_p c)}{dt} = \frac{\gamma_p^3}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{a}$$

$$\frac{d\,\gamma_p \vec{v}}{dt} = \gamma_p \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\,\frac{d\gamma_p}{dt} = \gamma_p\,\vec{a} + \frac{\gamma_p^3}{c^2}\,\vec{v}\,.(\vec{v}\cdot\vec{a})$$

soit $\underset{\sim}{A} = \left(\frac{\gamma_p^4}{c}\,\vec{v}\cdot\vec{a}\,,\ \gamma_p^2\,\vec{a} + \frac{\gamma_p^4}{c^2}\,\vec{v}\,.(\vec{v}\cdot\vec{a})\right)$ On a bien $\underset{\sim}{U}\cdot\underset{\sim}{A} = 0$

b) le ref propre (R_0) du pt matériel est le ref d'inertie (I) comobile qui coïncide à chaque instant t avec le pt matériel. Dans ce ref (R_0), la vitesse instantanée du pt matériel est nulle $\vec{v} = \vec{0}$, par contre l'accélération est $\neq$ de 0 !

Pour passer de (R) à (R_0) $\rightarrow$ transfo de Lorentz

Avec 1D on a :

$$\underset{\sim}{A_0} = \begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^4 \frac{v}{c}\frac{dv}{dt} \\ \gamma^4 \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}_R$$

A noter que comme (R_0) est lié à la particule on a ici un cas particulier où $\underbrace{\gamma_{R/R_0}}_{\gamma \text{ du change}^t \text{ de ref}} \equiv \gamma_p\big|_R \equiv \gamma$

γ_p calculé dans R

$$\rightarrow A'_0 = \gamma^3 \frac{dv}{dt}\underbrace{\left(\frac{v}{c} - \beta\right)}_{0} = 0$$

$$\rightarrow A'_1 = \gamma^5 \frac{dv}{dt}\underbrace{\left(1 - \beta^2\right)}_{1/\gamma^2} = \gamma^3 \frac{dv}{dt}$$

et donc $\underset{\sim}{A_0} = \left(0\,,\ \gamma^3 \frac{dv}{dt}\right)$

1°/ a) Si on écrit la transformation de Lorentz, on a que : $\underset{\sim}{A} = \Lambda^{-1} \underset{\sim}{A_0}$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} A_0 = \gamma \dfrac{d(\gamma c)}{dt} \\ A_1 = \gamma \dfrac{d(\gamma v)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_0 = \text{cste}$$

$$\rightarrow \gamma \frac{d(\gamma v)}{dt} = \gamma a_0 \quad \rightarrow \gamma v = a_0 t + \underbrace{\text{cste}}_{0 \text{ car } v = 0 \text{ à } t=0}$$

soit encore $v^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) a_0^2 t^2 \rightarrow \frac{v^2}{c^2}\left(1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}\right) = \frac{a_0^2 t^2}{c^2}$

$$\rightarrow \boxed{v = \frac{dx}{dt} = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}}}$$ et par intégration de

$$dx = \frac{c^2}{2a_0} \frac{d\left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}} \rightarrow \boxed{x = \frac{c^2}{a_0}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2} - 1\right)}$$ avec $x = 0$ à $t = 0$

b) On a que $d\tau \equiv dt_0 = \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$

d'où $\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{(a_0 t/c)^2}{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}}\, dt$

$$= \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2}} = \frac{c}{a_0} \operatorname{argsh}\left(\frac{a_0 t}{c}\right)$$ et donc

$$\boxed{t = \frac{c}{a_0} \operatorname{sh} \frac{a_0 \tau}{c}}$$

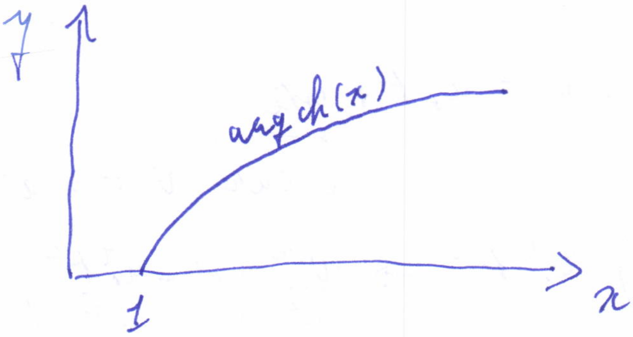
avec $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

c) On a donc que $x = \frac{c^2}{a_0}\left[\sqrt{1+\text{th}^2\frac{a_0\tau}{c}} - 1\right]$

$= \frac{c^2}{a_0}\left[\text{ch}\frac{a_0\tau}{c} - 1\right]$ avec $\text{ch}^2x - \text{th}^2x = 1$

soit $\text{ch}\frac{a_0\tau}{c} = 1 + \frac{a_0 x}{c^2}$ et donc $\boxed{\tau = \frac{c}{a_0}\,\text{argch}\left(1+\frac{a_0 x}{c^2}\right)}$



d) conversion de a_0 en $m\,s^{-2}$ en a.l./a²

$a_0 = 9{,}52\ m\,s^{-2} = 9{,}52 \times \underbrace{\frac{1}{c\times 365{,}25\times 24\times 3600}}_{m \to a.l} \times \underbrace{(365{,}25\times 24\times 3600)^2}_{s^{-2}\to a^{-2}} = 1{,}002\ a.l/a^2$

avec $c = 1\ a.l/a$ donc $\tau \simeq \text{argch}(1+x)$ et $t \simeq \text{th}\,\tau$

	Proxima du Centaure	centre de la galaxie	Andromède (galaxie)	limites Univers
distance (a.l.)	4,25	30 000	2,2.10⁶	15.10⁹
Tps terrestre t (a)	5,15	30 001	2,2.10⁶	15.10⁹
Tps propre τ (a)	2,34	11	15,3	24,1