Force de Minkowski

$$\boxed{\frac{dP^\mu}{d\tau} = K^\mu}$$ où $P^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p}\right)$ avec $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ et $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

1/ si l'on a été capable de généraliser la seconde loi de Newton (le PFD) à $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (où $\vec{p}$ est l'impulsion relativiste) la relation encadrée ci-dessus conduit à $K^\mu = (K^0, \vec{K})$ avec $\vec{K} = \gamma \vec{F}$ puisque $\frac{d(\ldots)}{d\tau} = \gamma \frac{d(\ldots)}{dt}$.

2/ on a $P^\mu P_\mu = m^2c^2 = C^{ste}$ → un peu de réflexion montre que

$$\frac{d}{d\tau}(P^\mu P_\mu) = 2 P_\mu \frac{dP^\mu}{d\tau}$$

donc, comme $\frac{d}{d\tau}(P^\mu P_\mu) = 0$ cela donne $0 = 2P_\mu \frac{dP^\mu}{d\tau} \underset{\uparrow}{=} 2 P_\mu K^\mu$

(toujours avec la relation encadrée)

d'où $P_\mu K^\mu = 0$

cela s'écrit $\frac{\mathcal{E}}{c} K^0 - \gamma \vec{F} \cdot \vec{p} = 0$ où (relation encadrée) $\gamma \frac{d}{dt}(\mathcal{E}/c) = K^0$

et (déf. impulsion relativiste) $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$

d'où $\gamma \frac{\mathcal{E}}{c} \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right) = m\gamma^2 \vec{F} \cdot \vec{v}$

en écrivant $\mathcal{E} = m\gamma c^2$ cela donne $= \frac{d}{dt}(m\gamma c^2) = \vec{F} \cdot \vec{v}$

c'est le théorème de l'énergie cinétique.

Nous avons donc réussi à donner un sens également à la composante temporelle de l'éq. encadrée ci-dessus

FM2

3/ si $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ on peut écrire $\vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{d}{dt}\left(V(\vec{r}(t))\right)$

et on a donc : $\frac{d}{dt}\left(m\gamma c^2 + V(\vec{r})\right) = 0$

c'est la conservation de l'énergie totale. De même l'équation $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ peut être obtenue à partir du lagrangien :

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - V(\vec{r})$$

(vérification très facile) qui conduit bien à une énergie conservée de la forme $m\gamma c^2 + V(\vec{r})$.

Cependant, on voit tout de suite les limites de l'approche : il est difficile de trouver un potentiel $V(\vec{r})$ pour lequel l'action $\int dt L$ soit un invariant de Lorentz. Donc nos équations du mouvement sont, en général, en contradiction avec le 1er postulat d'Einstein (mais ☺ : tout marche bien pour l'électromagnétisme)

cf cours et la suite de l'exo ↗

4/ si on peut mettre les éqs. du mvt sous la forme $\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu$ qui obéit au 1er postulat d'Einstein, alors

on a vu que $K^\mu p_\mu = 0$ donc $K^\mu U_\mu = 0$. $\underset{\sim}{K}$ doit être "relié" à $\underset{\sim}{U}$. Solution la plus simple = relation linéaire qui, écrite sous une forme covariante est : $K^\mu = F^{\mu\nu} U_\nu$

on a $K^\mu U_\mu = F^{\mu\nu} U_\nu U_\mu \underset{\uparrow}{=} F^{\nu\mu} U_\mu U_\nu$

en renommant les indices : $\nu \to \mu$, $\mu \to \nu$

donc $\underset{\sim}{K} \cdot \underset{\sim}{U} = \frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu}\right) U_\mu U_\nu$ sera automatiquement nul si $F^{\mu\nu}$ est antisymétrique. Ce qu'on suppose désormais la relation $\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu = F^{\mu\nu} U_\nu$ s'écrit (rappel $\frac{d..}{d\tau} = \gamma \frac{d..}{dt}$)

(si $\mu = 1$) :

$$\gamma \frac{dp_x}{dt} = F^{10} U_0 + F^{11} U_1 + F^{12} U_2 + F^{13} U_3 \quad \text{où } U_\nu = \gamma(c, -\vec{v})$$

$$= \gamma E_x + 0 + (-B_z)(-\gamma v_y) + B_y(-\gamma v_z)$$

$$= \gamma [E_x + B_z v_y - B_y v_z] = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})_z$$

etc

on arrive à $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$. on a envie de rajouter la charge électrique q ! On a le droit et même le devoir, sinon les charges ⊕ auraient les même trajectoires que les charges ⊖.

- on veut que K^μ soit un "bon" 4vecteur. cad que dans un référentiel $\mathcal{R}'$: $K'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu K^\nu$

Vérifions que c'est bien le cas si, lors d'un changement de référentiel $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$

alors $F'^{\mu\nu} U'_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha \underbrace{\Lambda^\nu{}_\beta \Lambda_\nu{}^\gamma} F^{\alpha\beta} U_\gamma$

cet objet vaut δ^γ_β c'est la relation (I.18) du cours qui découle de la conservation du pseudo-produit scalaire

il vient $F'^{\mu\nu} U'_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta} U_\beta$

soit $K'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha K^\alpha$ as it should.