Exo 6 Expce d'Hafele et Keating

$V = 900$ km/h $\qquad R = 6380$ km $\qquad T_{vol} = \dfrac{2\pi R}{V} = 45$ h

1°) On suppose le ref au sol inertiel. Pour le temps propre de l'horloge en mouvement on a : $d\tau = \dfrac{dt}{\gamma} = \sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}\, dt$

Le décalage temporel est donc

$$\Delta t = t_{vol} - t_{sol} = \left(\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - 1\right) t_{sol}$$

$$\frac{V}{c} << 1 \rightarrow \Delta t \simeq -\frac{V^2}{2c^2}\, t_{sol}$$

A.N. : $\Delta t = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{900 \cdot 10^3/3600}{3 \cdot 10^8}\right)^2 45 \times 3600$

$$= -5{,}6 \cdot 10^{-8}\ s = -56\ ns\ !$$

$\rightarrow$ 37,3 µs sur 30 ans à raison de 1000h/an

Cette différence de temps est parfaitement mesurable par une horloge atomique et correspond aux ordres de grandeurs mesurées par l'expce.

Δt pour un trajet Paris-Orsay ?

$d = 25$ km $\qquad t = 30$ mn $\qquad v = 70$ km/h

$$\Delta t = -\frac{1}{2}\left(\frac{70 \cdot 10^3/3600}{3 \cdot 10^8}\right)^2 \times 30 \times 60 = 3{,}7 \cdot 10^{-12}\ s$$

$$= 3{,}7\ ps \ \ldots$$

$\rightarrow$ 7,4 ns en 5 ans

2°) Le réf. lié au sol n'est pas un réf. galiléen. Par rapport au réf géocentrique il a une vitesse :

$$v_{rot} = R\omega = \frac{2\pi R}{24 \times 3600} = \frac{2\pi \times 6300 \cdot 10^3}{24 \times 3600} = 458\ m\,s^{-1}$$

à composer à la vitesse de l'avion : 900 km/h = 250 m s^{-1}

On a donc en fait / au ref géocentrique :

$$t_{sol} \simeq t_{geo}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_{rot}}{c}\right)^2\right)$$

$$t_{Est} \simeq t_{geo}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_{rot}+v}{c}\right)^2\right)$$

(on considère bien entendu que $v_{rot} + v \ll c$!)

$$t_{Ouest} \simeq t_{geo}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_{rot}-v}{c}\right)^2\right)$$

On obtient donc : $t_{Est} - t_{sol} = \frac{t_{geo}}{2}\left[\left(\frac{v_{rot}}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_{rot}+v}{c}\right)^2\right]$

$$= \frac{t_{geo}}{2c^2}\left[v_{rot}^2 - v_{rot}^2 - 2v\,v_{rot} - v^2\right] = -\frac{t_{geo}}{2c^2}\left(v^2 + 2v\,v_{rot}\right)$$

$$= -\frac{t_{geo}}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\left(1 + 2\frac{v_{rot}}{v}\right)$$

Et $t_{ouest} - t_{sol} = \frac{t_{geo}}{2c^2}\left[(v_{rot})^2 - (v_{rot} - v)^2\right]$

$$= \frac{t_{geo}}{2c^2}\left[v_{rot}^2 - v_{rot}^2 - v^2 + 2v\,v_{rot}\right] = -\frac{t_{geo}}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\left(1 - \frac{2v_{rot}}{v}\right)$$

Si on considère que $t_{geo} \simeq t_{sol} = 45\,h$ alors

$\frac{t_{geo}}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 56\,ns$ (déjà calculé)

et $1 \pm 2\frac{v_{rot}}{v} = \begin{vmatrix} +4,7 \\ -2,7 \end{vmatrix}$ soit $t_{Est} - t_{sol} = -263\,ns$

$t_{ouest} - t_{sol} = +151\,ns$

Ordre de grandeur ok, mais pour être plus précis il faudrait prendre en compte l'effet Sagnac (exo suivant) et les effet de relativité générale. Sur Wikipedia : ns gagnés :

	prédictions			
	gravitation (Relativité géné)	cinématique (relat. restreinte)	Total	Mesure
vers l'Est	$+144 \pm 14$	-184 ± 18	-40 ± 23	-59 ± 10
vers l'Ouest	$+179 \pm 18$	$+96 \pm 10$	275 ± 21	273 ± 7