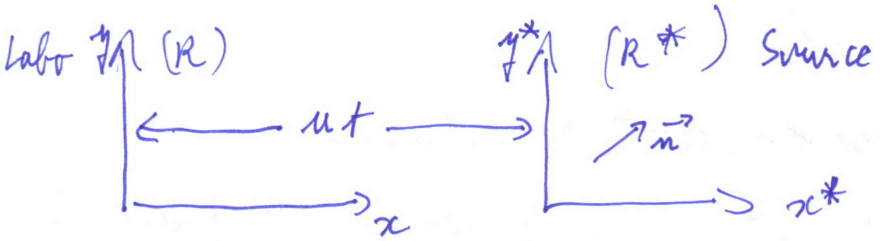
Exo 8 Distribution spatiale des photons émis par une source en mouvement



Pour des photons de quadrivecteur impulsion énergie de la forme $\underset{\sim}{P} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ avec $\underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{P} = 0$ (la masse du photon est nulle) on a donc $\|\vec{p}\| = \frac{E}{c}$

On peut donc écrire $\underset{\sim}{P} = \frac{E}{c}(1, \vec{n})$ où $\|\vec{n}\| = 1$

Pour passer du labo à la source on a : $\underset{\sim}{P}^* = \Lambda \underset{\sim}{P}$

avec $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ L'angle azimutal φ ne joue aucun rôle (on prend $\varphi = 0$) $\rightarrow z = 0$

On obtient

$$\begin{cases} E^*/c = \gamma(1 - \beta\cos\theta)\frac{E}{c} \\ E^*/c \cos\theta^* = \gamma(-\beta + \cos\theta)\frac{E}{c} \\ \frac{E^*}{c}\sin\theta^* = \frac{E}{c}\sin\theta \end{cases}$$

On a donc $\sin\theta^* = \dfrac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$ et $\cos\theta^* = \dfrac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}$

Les photons émis dans (R^*) dans l'angle solide $d\Omega^*$ compris entre les angles θ^* et $\theta^* + d\theta^*$ sont donnés par :

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{d\Omega^*}{4\pi} = \frac{2\pi\sin\theta^* d\theta^*}{4\pi} = \frac{1}{2}\sin\theta^* d\theta^*$$ avec dN le nbre de photons émis

$\left(\int dN = N_0\right)$

soit $dN = \frac{N_0}{2} \sin\theta^* \, d\theta^*$

Ces mêmes photons apparaîtront dans (R) dans un angle solide $d\Omega$ compris entre θ et $\theta + d\theta$

En différentiant la formule en $\cos\theta^*$ on obtient :

$$-\sin\theta^* \, d\theta^* = -\sin\theta \, d\theta \left(\frac{1}{1-\beta\cos\theta}\right) + \frac{(\cos\theta-\beta)(-1)(\beta\sin\theta)\, d\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{-\sin\theta \, d\theta \,(1-\beta\cos\theta) + \sin\theta \, d\theta \, \beta\,(\cos\theta-\beta)}{(1-\beta\cos\theta)^2}$$

$$= -\sin\theta \, d\theta \, \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}$$

L'émission dans (R) n'est plus isotrope, on a :

$$\frac{dN}{N_0} = f(\theta)\, \frac{d\Omega}{4\pi} \quad \text{avec} \quad f(\theta) = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\theta \, d\theta \, \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}$$

Test de consistance, il faut que $\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \, f(\theta) = 2$
(on intègre sur tout l'angle solide)

$$\int_0^\pi f(\theta) \sin\theta \, d\theta = \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{1-\beta^2}{(1+\beta u)^2} \, du}_{\text{avec } u = -\cos\theta,\ du = \sin\theta \, d\theta} = \frac{\beta^2-1}{\beta} \left(\frac{1}{1+\beta u}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2 \quad \text{ok}$$

$$= (1-\beta^2) \int_{-1}^{1} \frac{du}{(1+\beta u)^2}$$

Soit Θ l'angle à l'intérieur duquel sont émis 50% des photons (dans le labo). On doit avoir que $\int_0^{\Theta} f(\theta) \sin\theta \, d\theta = 1$
puisque on doit avoir que $\frac{dN}{N_0} = \frac{1}{2} \sin\theta^* d\theta^* = \frac{1}{2}$

On a donc $\frac{\beta^2-1}{\beta} \left(\frac{1}{1-\beta\cos\Theta} - \frac{1}{1-\beta} \right) = 1$

$$\frac{1}{1-\beta\cos\Theta} - \frac{1}{1-\beta} = \frac{\beta}{\beta^2-1} \rightarrow \frac{1}{1-\beta\cos\Theta} = \frac{\beta}{\beta^2-1} + \frac{1}{1-\beta} = \frac{\beta-1}{(\beta+1)(\beta-1)(1-\beta)} = \frac{1}{1-\beta^2}$$

soit $1-\beta^2 = 1 - \beta\cos\Theta$ et donc $\boxed{\cos\Theta = \beta}$ voir figure correction Nicolas

Si $\beta = \frac{1}{2}$ alors $\Theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$

Représentation polaire de $f(\theta) = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta.\cos\theta)^2}$ pour différentes valeurs de β.