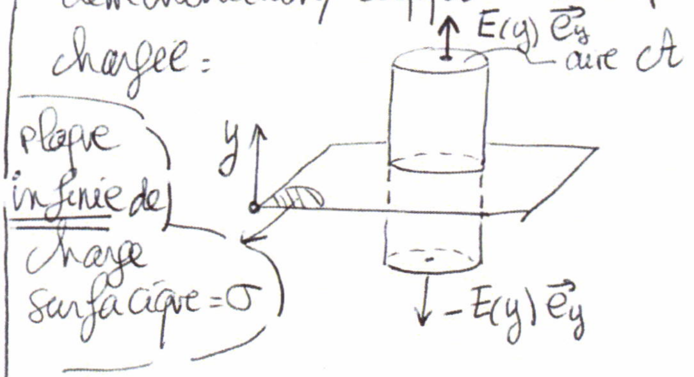
Condensateur mobile

Dans $\mathcal{R}$ le champ électrique est donné par le thm de Gauss, et il vaut à l'intérieur des plaques : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_y}$

démonstration/rappel : champ créé par une plaque uniformément chargée :

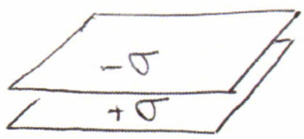


thm de Gauss appliqué au cylindre :

$$2\mathcal{A}\,E(y) = \frac{\sigma\mathcal{A}}{\varepsilon_0}$$

donc
$$\vec{E}(y) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_y} & \text{pour } y>0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_y} & \text{pour } y<0 \end{cases}$$

et on a donc pour 2 plaques de densité de charge surfacique opposées :



* entre les plaques les champs s'ajoutent et $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_y}$
* en dehors des plaques les champs se somment à 0.

le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement / $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}$:

on a $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\,\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\,F^{\alpha\beta}$

soit $F' = \Lambda F \Lambda^t$ avec
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E_y/c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +E_y/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda^t$$

le calcul explicite donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{E_y}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_y/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\gamma E_y}{c} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{\beta\gamma E_y/c}\ 0 & 0 \\ \gamma E_y/c & -\frac{\beta\gamma E_y}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\gamma E_y}{c} & 0 \\ 0 & 0 & \beta\gamma\frac{E_y}{c} & 0 \\ \frac{\gamma E_y}{c} & -\frac{\beta\gamma E_y}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{F'^{\mu\nu}}$$

comme $F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x/c & -E'_y/c & -E'_z/c \\ E'_x/c & 0 & -B'_z & +B'_y \\ E'_y/c & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z/c & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix}$

on voit que

$$\begin{cases} E'_y = \gamma E_y = \gamma \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \text{et} \\ B'_z = -\beta \dfrac{\gamma}{c} E_y = -\gamma \dfrac{v}{c^2} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

non nul seulement entre les plaques bien sûr

▨ calcul direct dans $\mathcal{R}'$. Pour déterminer $\vec{E}'$ on peut toujours utiliser le thm de Gauss (puisque Maxwell Gauss : $\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' = \rho'/\varepsilon_0$ (*) reste valable). Mais ici à cause de la contraction des longueurs

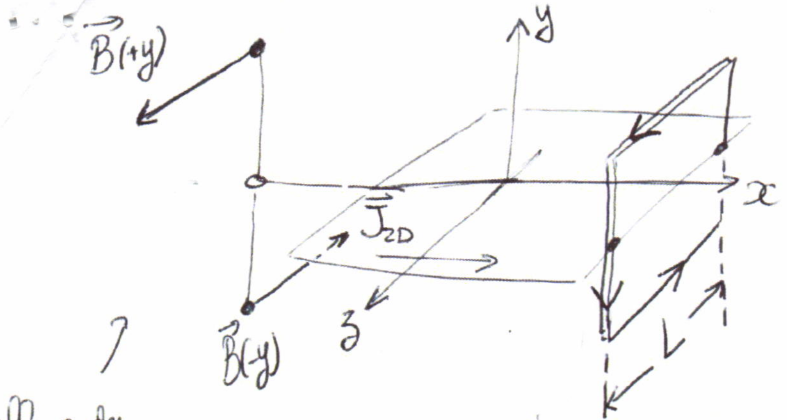
$\sigma' = \dfrac{Q}{a'c'} = \dfrac{\gamma Q}{ac} = \gamma\sigma$ on a donc directement $E'_y = \dfrac{\gamma\sigma}{\varepsilon_0}$

$(a' = a/\gamma$ et $c' = c)$

pour le champ magnétique c'est la m̂ chose : il faut déterminer le champ magnétique créé par une (puis deux) nappe(s) de courant

(*) si on utilise l'éq. locale, il faut utiliser pour déterminer $\vec{E}$ la relation de continuité $\vec{E}_{2\perp} - \vec{E}_{1\perp} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}$

CM3



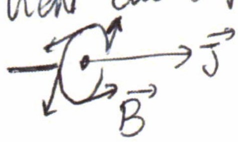
thm d'Ampère : $(y>0)$

$$2B(y) \times L = \mu_0 J_{2D} L$$

donc

$$\begin{cases} B_z(y>0) = \dfrac{\mu_0}{2} J_{2D} \\ B_z(y<0) = -\dfrac{\mu_0}{2} J_{2D} \end{cases}$$

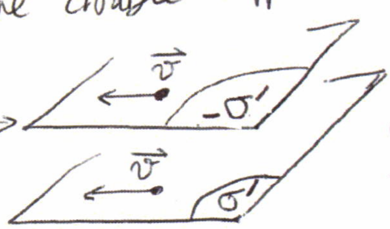
allure du champ $\vec{B}$ (soit avec les sym. soit on se souvient du chp crée par un fil z'Ox)



ici on a une double nappe avec : (dans R' le condensateur se déplace vers les x négatifs)

$J_{2D} = +\sigma' v$

$J_{2D} = -\sigma' v$



entre les nappes les champ s'ajoutent et cela donne :

$$B_z = -\mu_0 \sigma' v = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \gamma \sigma v$$

Th de Gauss $\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ $\quad$ $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

Th d'Ampère $\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé}$ $\quad$ $\vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \left(+ \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Loi de Biot et Savart $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint \dfrac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$