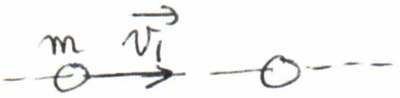
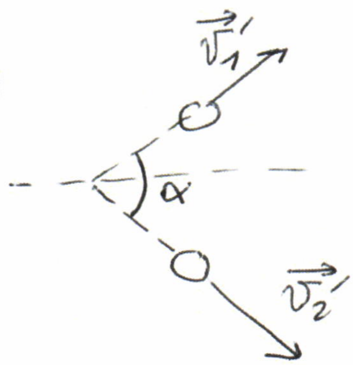
CE

collisions élastiques

1 cas classique = 



$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} m v_2'^2 \\ m\vec{v_1} = m\vec{v_1}' + m\vec{v_2}' \end{cases}$$

en élevant au carré = $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\,\vec{v_1}'\cdot\vec{v_2}'$ et en comparant avec la conservation de l'énergie cinétique on voit que $\vec{v_1}'\cdot\vec{v_2}' = 0$

2/ méca. relat = $\underline{P_1} + \underline{P_2} = \underline{P_1'} + \underline{P_2'}$

et (cas général) : $\underline{P} = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = (m\gamma c, m\gamma\vec{v})$ où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

on a donc $v^2/c^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$ et $(\gamma\vec{v})^2 = c^2(\gamma^2 - 1)$

ici on a $\begin{pmatrix} m\gamma_1 c \\ m\gamma_1\vec{v_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\gamma_1' c \\ m\gamma_1'\vec{v_1}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\gamma_2' c \\ m\gamma_2'\vec{v_2}' \end{pmatrix}$

en suivant le m̂ schéma que dans le cas classique =

$$\begin{cases} \gamma_1 + 1 = \gamma_1' + \gamma_2' \\ \gamma_1^2 \cancel{-1} = \gamma_1'^2 - 1 + \gamma_2'^2 \cancel{-1} + 2\gamma_1'\gamma_2' \frac{\vec{v_1}'\cdot\vec{v_2}'}{c^2} \end{cases} \rightarrow \frac{\sqrt{\gamma_1'^2 - 1}}{\gamma_1'} \cdot \frac{\sqrt{\gamma_2'^2 - 1}}{\gamma_2'} \cos\alpha$$

ici on exprime γ_1 en utilisant la relation du dessus et cela donne =

$$\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 + 2\gamma_1'\gamma_2' - 2\gamma_1' - 2\gamma_2' + 1 = \gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 - 1 + 2\sqrt{\gamma_1'^2 - 1}\sqrt{\gamma_2'^2 - 1}\cos$$

soit $\cancel{\gamma_1'^2} + \cancel{\gamma_2'^2} + \underbrace{\gamma_1'\gamma_2' - \gamma_1' - \gamma_2' + 1}_{(\gamma_1' - 1)(\gamma_2' - 1)} = \sqrt{\gamma_1'^2 - 1}\sqrt{\gamma_2'^2 - 1}\cos\alpha$

d'où $\boxed{\cos\alpha = \sqrt{\frac{\gamma_1' - 1}{\gamma_1' + 1}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma_2' - 1}{\gamma_2' + 1}}} \geqslant 0$ l'angle est aigu

CE2.

lorsque v_1' et v_2' tendent vers c : γ_1' et $\gamma_2' \to \infty$ et $\cos\alpha \to 1$
l'angle devient de + en + aigu.

lorsque v_1' et $v_2' \ll c$ alors $\gamma_1' = 1 + \frac{v_1'^2}{2c^2}$ et $\cos\alpha = \frac{v_1'v_2'}{4c^2}$

on écrit $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ (on pourrait développer au voisinage de $\pi/2$, mais l'orientation de α est arbitraire)

alors $\cos\alpha \simeq \varepsilon$

et donc, dans la limite non relativiste $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{v_1'v_2'}{4c^2}$

on peut obtenir le m̂ résultat en écrivant

$$(\underline{P_1} + \underline{P_2})^2 = (\underline{P_1'} + \underline{P_2'})^2$$

comme dans le cas général $\underline{P}^2 = m^2c^2$ ici, toutes les masses étant égales cela donne $\underline{P_1} \cdot \underline{P_2} = \underline{P_1'} \cdot \underline{P_2'}$

soit $\frac{E_1}{c} \cdot \frac{E_2}{c} = \frac{E_1'}{c} \cdot \frac{E_2'}{c} - \vec{p}_1' \cdot \vec{p}_2'$

on écrit $|\vec{p}c| = \sqrt{E^2 - m^2c^4}$ et $E_1 = E_1' - mc^2 + E_2'$

et alors :

$$(E_1' + E_2' - mc^2)mc^2 = E_1'E_2' - \cos\alpha\sqrt{E_1'^2 - m^2c^4}\sqrt{E_2'^2 - m^2c^4}$$

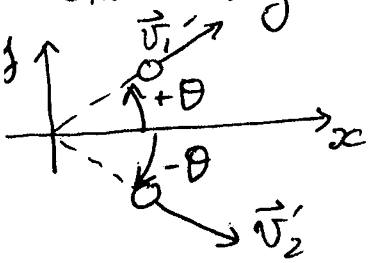
soit

$$\cos\alpha = \frac{E_1'E_2' - mc^2(E_1' + E_2' - mc^2)}{\sqrt{E_1'^2 - m^2c^4}\sqrt{E_2'^2 - m^2c^4}} = \frac{\gamma_1'\gamma_2' - (\gamma_1' + \gamma_2' - 1)}{\sqrt{\gamma_1'^2 - 1}\sqrt{\gamma_2'^2 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma_1' - 1}{\gamma_1' + 1}}\sqrt{\frac{\gamma_2' - 1}{\gamma_2' + 1}}$$

(résultat précédent)

collision symétrique :



la composante selon y de $\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ s'écrit :

$$0 = m\gamma_1'v_1'\sin\theta - m\gamma_2'v_2'\sin\theta$$

donc $\gamma_1'v_1' = \gamma_2'v_2' \Leftrightarrow \gamma_1' = \gamma_2' = \gamma'$ (cf. rappel page précédente)

alors $\cos\alpha = \frac{\gamma' - 1}{\gamma' + 1} = \frac{m\gamma'c^2 - mc^2}{m\gamma'c^2 + mc^2} = \frac{K'}{K' + 2mc^2} = \frac{K}{K + 4mc^2}$

on utilise la conservation de l'énergie : $K + 2mc^2 = 2K' + 2mc^2$ donc $K' = K/2$