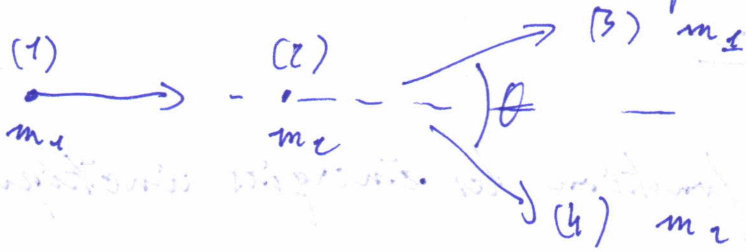
collision frontale : étude générale dans le cas élastique.



(1) + (2) → (3) + (4)   on se place dans le cas élastique (3) ≡ (1) et (4) ≡ (2)

On suppose (2) au repos.

Dans le labo :

$$\underline{P_1} = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ \vec{p_1} \end{pmatrix} \qquad \underline{P_2} = \begin{pmatrix} \frac{E_2}{c} = m_2 c^2 \\ \vec{p_2} = \vec{0} \end{pmatrix} \qquad \underline{P_3} = \begin{pmatrix} \frac{E_3}{c} \\ \vec{p_3} \end{pmatrix} \qquad \underline{P_4} = \begin{pmatrix} \frac{E_4}{c} \\ \vec{p_4} \end{pmatrix}$$

* Ecrivons la conservation de l'énergie et de la conservation de $\vec{P}$

$$\underline{P_1} + \underline{P_2} = \underline{P_3} + \underline{P_4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_1 + E_2 = E_3 + E_4 & (1) \\ \vec{p_1} + \underbrace{\vec{p_2}}_{0} = \vec{p_3} + \vec{p_4} & (2) \end{cases}$$

de (1) on tire $K_1 + m_1 c^2 + m_2 c^2 = K_3 + m_1 c^2 + K_4 + m_2 c^2$

$\rightarrow K_1 = K_3 + K_4$ normal car choc élastique ! On a conservation de l'E_c

* calculons l'angle θ entre (3) et (4)

$$(\underline{P_1} + \underline{P_2})^2 = (\underline{P_3} + \underline{P_4})^2$$

$$\underline{P_1}^2 + \underline{P_2}^2 + 2\,\underline{P_1}\,\underline{P_2} = \underline{P_3}^2 + \underline{P_4}^2 + 2\,\underline{P_3}\,\underline{P_4}$$

collision élastique $\rightarrow$ $\underline{P_1}\,\underline{P_2} = \underline{P_3}\,\underline{P_4}$

soit $\frac{E_1 E_2}{c^2} = \frac{E_3 E_4}{c^2} - \vec{p_3}\,\vec{p_4} = \frac{E_3 E_4}{c^2} - p_3 p_4 \cos\theta$

soit $\cos\theta = \frac{E_3 E_4 - E_1 E_2}{p_3 p_4 c^2}$

On peut exprimer en fonction des énergies cinétiques.

On a $E = \gamma m c^2 = K + mc^2$ soit avec $p^2c^2 = E^2 - m^2c^4$

$= (K+mc^2)^2 - m^2c^4$

soit $p^2c^2 = K^2 + m^2c^4 - m^2c^4 + 2Kmc^2 = K(K+2mc^2)$

d'où $\cos\theta = \frac{(K_3 + m_1c^2)(K_4+m_2c^2) - (K_1+m_1c^2)(K_2+m_2c^2)}{\sqrt{K_3(K_3+2m_1c^2)}\sqrt{K_4(K_4+2m_2c^2)}}$

or $K_2 = 0$ et $K_1 = K_3 + K_4$

$\rightarrow \cos\theta = \frac{K_3K_4 + \cancel{K_3 m_2 c^2} + K_4 m_1 c^2 + \cancel{m_1 m_2 c^4} - (\cancel{K_3} + K_4) m_2 c^2 - \cancel{m_1 m_2 c^4}}{\sqrt{\quad}\sqrt{\quad}}$

soit $\boxed{\cos\theta = \frac{K_4(K_3 + m_1c^2 - m_2c^2)}{\sqrt{K_3K_4(K_3+2m_1c^2)(K_4+2m_2c^2)}}}$

<u>cas particulier</u> : $m_1 = m_2 = m$

$\rightarrow \cos\theta = \frac{K_3K_4}{\sqrt{\quad}} = \sqrt{\frac{K_3K_4}{(K_3+2mc^2)(K_4+2mc^2)}}$

si K_3 et $K_4 \ll mc^2$ cas non relativiste

$\cos\theta \simeq \frac{\sqrt{K_3K_4}}{2mc^2} \rightarrow 0$ soit $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Passage au CdM

Appelons $\underline{P_i^*}$ les quadrivecteurs dans le CdM

* Montrons que dans le CdM on a $E_1^* = E_3^*$ et $E_2^* = E_4^*$

Dans le CdM on a : $\vec{p_1^*} + \vec{p_2^*} = \vec{p_3^*} + \vec{p_4^*} = \vec{0}$

soit $\|\vec{p_1^*}\| = \|\vec{p_2^*}\|$ et $\|\vec{p_3^*}\| = \|\vec{p_4^*}\|$

On a aussi $E_1^* + E_2^* = E_3^* + E_4^*$ (3)

Si on écrit les normes des quadrivecteurs on aura :

$$\underline{P_1^*}^2 = \frac{E_1^{*2}}{c^2} - \vec{p_1}^{*2} = \frac{m_1^2 c^4}{c^2}$$

$$\underline{P_3^*}^2 = \frac{E_3^*}{c^2} - \vec{p_3}^{*2} = \frac{m_1^2 c^4}{c^2}$$

$\rightarrow E_1^{*2} - p_1^{*2} c^2 = E_3^{*2} - p_3^{*2} c^2$

soit $E_1^{*2} - E_3^{*2} = p_1^{*2} c^2 - p_3^{*2} c^2$

De même avec $\underline{P_2^*}^2$ et $\underline{P_4^*}^2$ on aura :

$E_2^{*2} - E_4^{*2} = p_2^{*2} c^2 - p_4^{*2} c^2$

Or dans le CdM on a $p_1^* = p_2^*$ et $p_3^* = p_4^*$

donc $E_1^{*2} - E_3^{*2} = E_2^{*2} - E_4^{*2}$ soit $E_1^{*2} - E_2^{*2} = E_3^{*2} - E_4^{*2}$

$\rightarrow (E_1^* + E_2^*)(E_1^* - E_2^*) = (E_3^* - E_4^*)(E_3^* + E_4^*)$

et avec (3) on en déduit que $E_1^* - E_2^* = E_3^* - E_4^*$

$$\left.\begin{array}{l} E_1^* + E_2^* = E_3^* + E_4^* \\ E_1^* - E_2^* = E_3^* - E_4^* \end{array}\right\} \rightarrow E_1^* = E_3^* \quad \text{et } E_2^* = E_4^*$$

On a donc aussi $p_1^* = p_3^*$ et $p_2^* = p_4^*$ seule la direction du vecteur $\vec{p_i^*}$ change. avec $i = 1,3$ ou $2,4$

Les modules des vecteurs vitesse sont donc les m̃ aussi puisque la masse ne change pas

$v_1^* = v_3^*$ et $v_2^* = v_4^*$

* calculons β_{CM} du CdM / au labo

On sait que dans le CdM $\underline{P}' = \left(\frac{E_1' + E_2'}{c}, \vec{0} \right)$

dans le labo $\underline{P} = \left(\frac{E_1 + m_2 c^2}{c}, \vec{P_1} \right)$

$\underline{P}' = \Lambda^{-1} \underline{P}$ soit

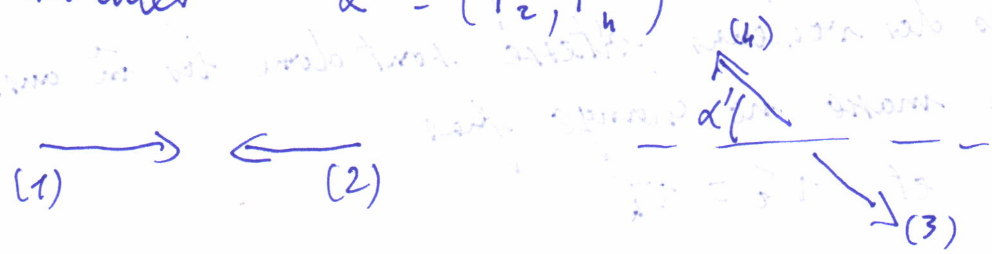
$$\begin{pmatrix} \frac{E_1' + E_2'}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{CM} & -\beta_{CM}\gamma_{CM} & 0 & 0 \\ -\beta_{CM}\gamma_{CM} & \gamma_{CM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_1 + m_2 c^2}{c} \\ P_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \gamma_{CM} \left(-\beta_{CM} \frac{E_1 + m_2 c^2}{c} + P_1 \right) \rightarrow \boxed{\beta_{CM} = \frac{P_1 c}{E_1 + m_2 c^2}}$$

Notons que si $m_1 \gg m_2$ alors le centre de masse est confondu avec la particule (1) et on a $\beta_{CM} \simeq \frac{P_1 c}{E_1}$ et $v_{CM} = c\beta_{CM}$

* calculons l'énergie de la particule (2) après la collision et montrons que son én. cinétique sera max pour un angle $\alpha' = \pi$

Appelons α' l'angle de déviation de la particule (2) dans le centre de masse / à la direction d'incidence des particules $\alpha' = (\vec{P_2'}, \vec{P_4'})$



$$\begin{pmatrix} \frac{E_4}{c} \\ p_{4x} \\ p_{4y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{cm} & \beta_{cm}\gamma_{cm} & 0 & 0 \\ \beta_{cm}\gamma_{cm} & \gamma_{cm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_4'}{c} \\ p_4' \cos\alpha' \\ p_4' \sin\alpha' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{E_4}{c} = \gamma_{cm}\left(\frac{E_4'}{c} + \beta_{cm}\, p_4' \cos\alpha'\right) = \gamma_{cm}\left(\frac{E_2'}{c} + \beta_{cm}\, p_2' \cos\alpha'\right)$$

car $E_4' = E_2'$ et $p_4' = p_2'$

on a aussi :

$$\begin{pmatrix} \frac{E_2'}{c} \\ p_2' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{cm} & -\beta_{cm}\gamma_{cm} & 0 & 0 \\ -\beta_{cm}\gamma_{cm} & \gamma_{cm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_2}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \quad \frac{E_2'}{c} = \gamma_{cm}\frac{E_2}{c} \qquad p_2' = -\beta_{cm}\gamma_{cm}\frac{E_2}{c}$

soit $\frac{E_4}{c} = \gamma_{cm}\left(\gamma_{cm}\frac{E_2}{c} - \beta_{cm}^2\gamma_{cm}\frac{E_2}{c}\cos\alpha'\right) = \gamma_{cm}^2\frac{E_2}{c}\left(1 - \beta^2\cos\alpha'\right)$

$E_4 = K_4 + m_2 c^2 \qquad E_4^{max} \Rightarrow K_4^{max}$ pour $\alpha' = \pi$

$\Rightarrow$ la particule (2) est rétrodiffusée dans le ref du CdM

Pour $\alpha' = \pi$ on a $K_4^{Max} = E_4^{Max} - m_2 c^2$

$$= \gamma_{cm}^2 E_2 (1+\beta^2) - m_2 c^2$$

et ici $E_2 = m_2 c^2 \rightarrow K_4^{Max} = m_2 c^2 \left[\underbrace{\gamma_{cm}^2(1+\beta_{cm}^2) - 1}_{2\beta_{cm}^2\gamma_{cm}^2}\right]$

d'où $\boxed{K_4^{Max} = 2 m_2 c^2 \gamma_{cm}^2 \beta_{cm}^2}$