C1

champ créé par charge ponctuelle en TRU

1°/

Dans le réf. propre $\mathcal{R}_0$ on a $\phi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^{(0)}}$ et $\vec{A}^{(0)} = \vec{0}$
ce qui correspond à des chps $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ tous cons-

on effectue la transf. de Lorentz sur $\underset{\sim}{A}^{(0)\mu}(\underset{\sim}{X}^{(0)})$ = (passage de $\mathcal{R}^{(0)}$ vers $\mathcal{R}$) =

$$\begin{pmatrix} \Phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(0)}/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

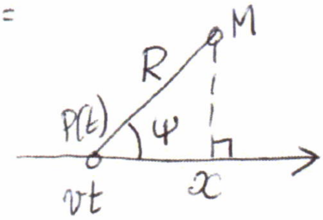
$$\begin{cases} \Phi = \gamma\phi^{(0)} = \dfrac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0 r^{(0)}} \\ \text{et} \\ \vec{A} = \beta\gamma\dfrac{\phi^{(0)}}{c}\vec{e_x} = \beta\dfrac{\Phi}{c}\vec{e_x} \end{cases}$$

2°/ il faut exprimer ϕ et $\vec{A}$ en utilisant les coord. de $\mathcal{R}$:
on a $X^{(0)\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu}$ soit $x^{(0)} = \gamma(x - \beta ct)$ et $y^{(0)} = y$ et $z^{(0)} = z$

donc $$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma q}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}}$$

on peut écrire cela sous la forme : $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{\sqrt{(x-vt)^2 + \dfrac{y^2+z^2}{\gamma^2}}} \underset{\left(\frac{1}{\gamma^2} = 1-\beta^2\right)}{=} \dfrac{q/4\pi\varepsilon}{\sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2 - \beta^2(y^2+z^2)}}$

on a le schéma :



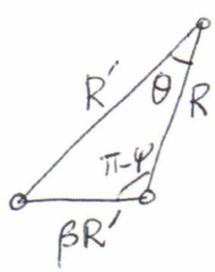
$$\Rightarrow \begin{cases} (x-vt)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ \text{et} \\ y^2 + z^2 = R^2 \sin^2\psi \end{cases}$$

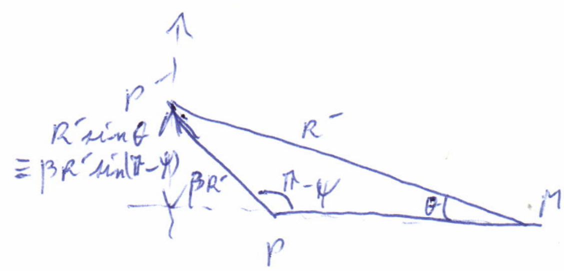
donc $$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\psi}}}$$

3°/ ∘ On a par définition : $P'M = c(t-t') = R'$
et donc $P'P = v(t-t') = \beta R'$

$P' \equiv P(t_1)$
et $\left| \begin{array}{l} t' = t_1 \\ R' = R_1 \end{array} \right.$

d'où la construction :





C2

en utilisant l'égalité triangulaire $\frac{\sin\hat{A}}{a} = C^{ste}$

démonstration :

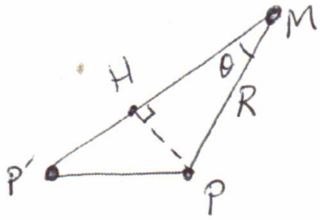
$h = b\sin\hat{A} = a\sin\hat{B}$

voir schéma page précédente

cela donne : $\frac{\sin\theta}{\beta R'} = \frac{\sin(\pi-\psi)}{R'} = \frac{\sin\psi}{R'}$ donc $\beta\sin\psi = \sin\theta$ et

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q/4\pi\varepsilon_0}{R\cos\theta}$$

mais on a :



$$R\cos\theta = HM = \underbrace{P'M}_{R'} - \underbrace{P'H}_{\hat{P'M}\cdot\vec{P'P} = \hat{R}'\cdot R'\vec{\beta}}$$

donc $$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{q/4\pi\varepsilon_0}{R'(1-\hat{R}'\cdot\vec{\beta})}}$$

avec $\hat{P'M} = \frac{\vec{P'M}}{\|\vec{P'M}\|}$ et $\hat{R}' = \vec{R}'/\|\vec{R}'\|$

satisfaisant parce que tout est déterminé par la position et la vitesse de la particule à "l'instant retardé" = correspond à une interaction qui se propage à vitesse c (pas d'action instantanée).

Cette formule est un cas particulier des potentiels de Liénard-Wiechert.

4°) $$\phi(\vec{r},t) = \frac{\gamma q/4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2}} \qquad A_x = \beta\phi/c \qquad A_y = A_z = 0 \qquad \partial_x = \frac{\partial}{\partial(x-vt)}\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A} \leadsto E_x = -\partial_x\phi - \frac{\beta}{c}\partial_t\phi$$

où ici $\partial_x\phi = \frac{\partial\phi}{\partial(x-vt)}$, $\partial_t\phi = -v\frac{\partial\phi}{\partial(x-vt)}$

avec $\partial_t = \frac{\partial}{\partial(x-vt)}\frac{\partial(x-vt)}{\partial t}$

donc
$$E_x = \underbrace{(-1+\beta^2)}_{-\frac{1}{\gamma^2}}\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial(x-vt)}}_{\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\gamma^2(x-vt)}{[---]^{3/2}}}$$

donc $$E_x = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x-vt}{[---]^{3/2}}$$

on a également $E_y = -\partial_y\phi = \frac{q\gamma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{[---]^{3/2}}$ et formule similaire pour E_z

Donc $$\boxed{\vec{E} = \frac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{[\gamma^2(x-vt)^2+y^2+z^2]^{3/2}}\vec{R}}$$ = miracle... le champ reste radial ($\vec{R} = \vec{PM}$)

Etude de E_x $\quad E_x(\xi = x - vt) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\gamma^2}\dfrac{\xi}{\left[\xi^2 + \dfrac{y^2+z^2}{\gamma^2}\right]^{3/2}}$

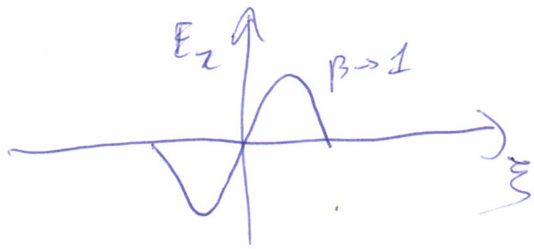
$$\frac{dE_x}{d\xi} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\gamma^2}\frac{1}{[---]^{5/2}} \times \left\{ \underbrace{\xi^2 + \frac{y^2+z^2}{\gamma^2} - 3\xi^2}_{} \right\} \rightarrow \frac{y^2+z^2}{\gamma^2} - 2\xi^2$$

nul si $\xi_0 = \pm\sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{2\gamma^2}}$ et alors $E_x(\xi_0) = \pm \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\dfrac{4}{27}}\dfrac{1}{y^2+z^2}$

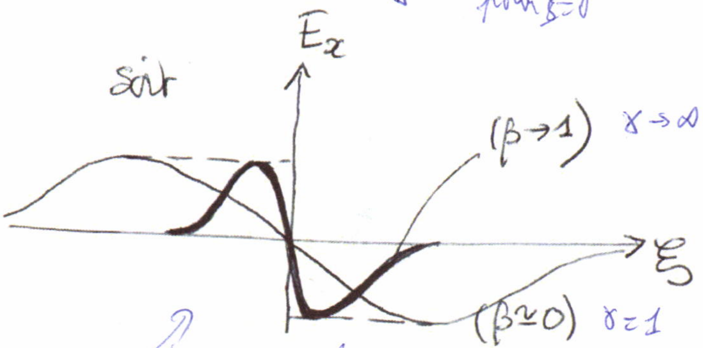
(indep. de γ)

on a :

ξ	$-\infty$		$-\xi_0$		ξ_0		$+\infty$
$dE_x/d\xi$		$\cancel{+}$ $-$	0	$\cancel{-}$ $+$	0	$\cancel{+}$ $-$	
E_x		$\cancel{\nearrow}$ $\searrow$		$\cancel{\searrow}$ $\nearrow$ 0 pour $\xi=0$		$\cancel{\nearrow}$ $\searrow$	



soit

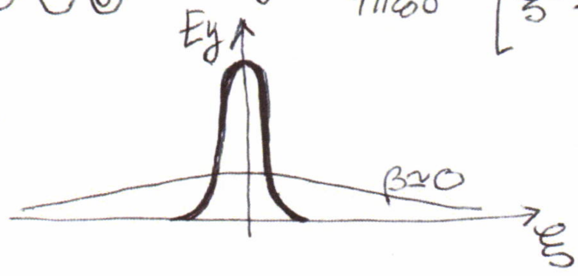


les extrema deviennent piqués dans la limite ~~xxx~~ ultra relativiste

Etude de E_y : $\quad E_y = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\gamma^2}\dfrac{y}{\left[\xi^2 + \dfrac{y^2+z^2}{\gamma^2}\right]^{3/2}}$

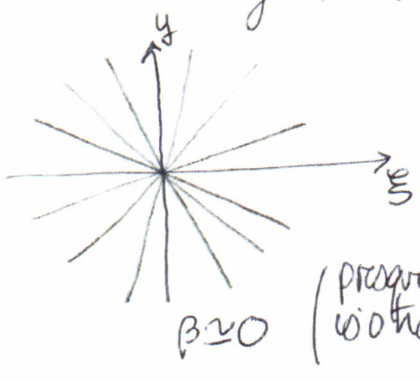
c'est presque une Lorentzienne - hauteur $\propto \gamma$ et largeur $\propto 1/\gamma$ -

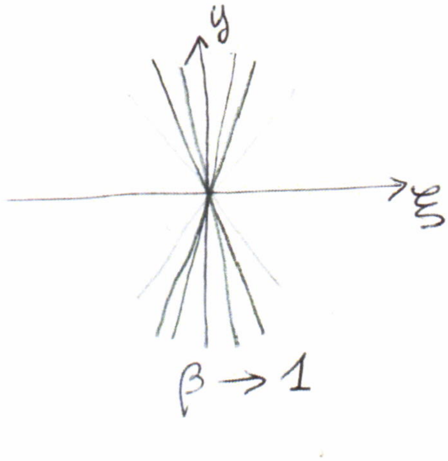
on a :



Lorentzienne = fct de la forme $\dfrac{1}{1+x^2}$

lignes de champ : on a vu que le champ est radial. On va faire un dessin en mettant bcp de lignes là où le flux est important :

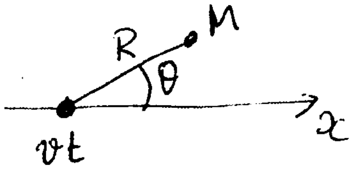




une autre manière de voir cela consiste à tracer le flux $\Phi(\theta) = \vec{E}\cdot\hat{R}$ $\left(\text{flux total} : \int (\vec{E}\cdot\hat{R})\, R^2 d^2\Omega\right)$

il est facile de voir que $R^2(\vec{E}\cdot\hat{R}) = \dfrac{\gamma q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{R^3}{(\gamma^2\xi^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

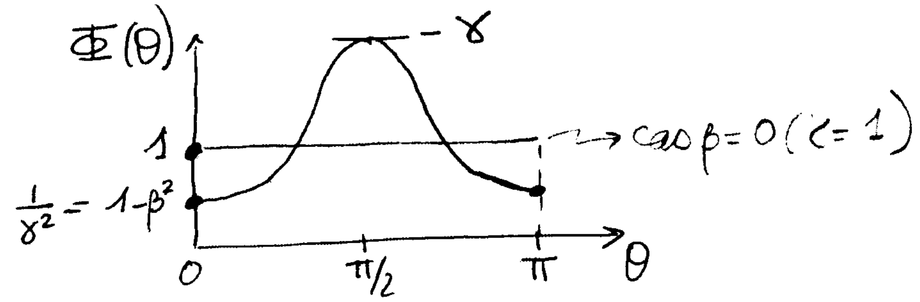
on prend θ tel que :



alors $\begin{cases} \xi = R\cos\theta \\ y^2+z^2 = R\sin\theta \end{cases}$

donc $\Phi(\theta) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon} \dfrac{\gamma}{\left[\gamma^2\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]^{3/2}}$

on a



champ $\vec{B}$

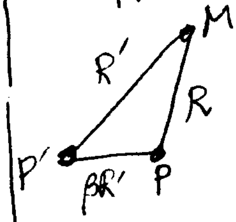
$$\begin{cases} B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y = 0 \\ B_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z = \dfrac{\beta}{c}\partial_z\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} \dfrac{\beta}{c} \gamma q \dfrac{-z}{[\,---\,]^{3/2}} \\ B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x = -\dfrac{\beta}{c}\partial_y\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\beta}{c}\gamma q \dfrac{+y}{[\,---\,]^{3/2}} \end{cases}$$

on remarque que $B_y = -\dfrac{\beta}{c} E_z$ et $B_z = \dfrac{\beta}{c} E_y$

donc $\boxed{\vec{B} = \vec{\beta}\wedge \dfrac{\vec{E}}{c} = \hat{R}' \wedge \dfrac{\vec{E}}{c}}$

$$\begin{vmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x/c \\ E_y/c \\ E_z/c \end{vmatrix}$$

en effet on a la construction = (cf qques pages + haut)



$\vec{\beta} R' + \vec{R} = \vec{R}'$

soit $\vec{\beta} = \hat{R}' - \dfrac{\vec{R}}{R'}$

colinéaire à $\vec{E}$ = ne joue pas dans le produit vectoriel