Université Paris Saclay
L3 PFON, groupe MAG1 Christophe Texier

TD 2 de physique statistique - séance du 5 février 2021

Exercice 5

Oscillateur harmonique

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

pb académique (dans le sens où il n'y a pas de raison d'utiliser la physique stat. dans ce cas)

A. Analyse de la mécanique classique

on détermine la trajectoire dans l'espace des phases : $\vec{\Gamma}(t) = (x(t), p(t))$, une ellipse

$$x(t) = x_0 \cos\omega t \quad \text{ et } p(t) = -m\omega x_0 \sin\omega t$$

d'énergie $E = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2$.

On introduit une "distribution" en faisant une moyenne sur le temps

$$w(x) = \lim_{\mathscr{T}\to\infty} \int_0^{\mathscr{T}} \frac{dt}{\mathscr{T}} \delta(x - x(t)) = \int_0^{T/2} \frac{dt}{T/2} \delta(x - x(t)) = \frac{1}{\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

où $T = 2\pi/\omega$ est la période.
Cela revient à écrire $w(x)\,dx = \frac{dt}{T/2} = \frac{dx}{v(x)}$ où $v(x) = \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)}$

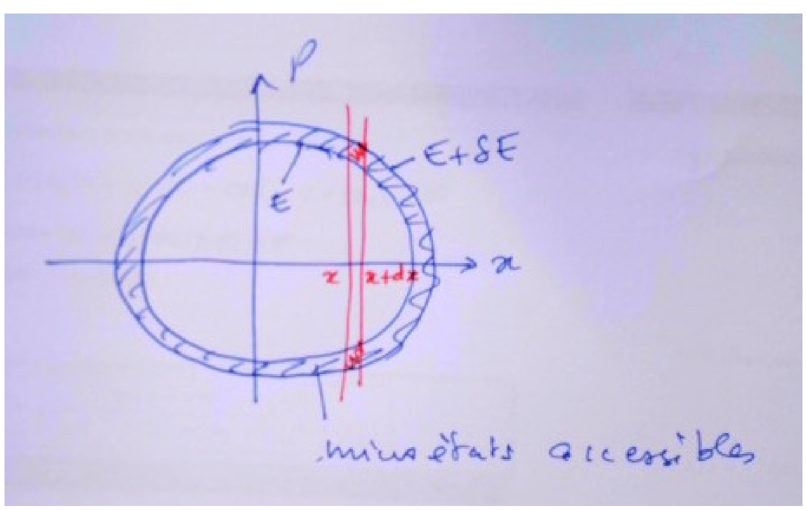
B. Analyse de la physique statistique

Point de départ : le postulat fondamental de la physique statistique

$$\rho^*(x,p) = C \quad \text{ si } E \le H(x,p) \le E + \delta E$$

et $\rho^*(x,p) = 0$ sinon. Et donc la distribution de la position (la loi marginale) est reliée à (la loi jointe) $\rho^*(x,p)$ par

$$w(x) = \int dp\, \rho^*(x,p)$$



2/ **Préliminaire :** calculer le "volume" de la coquille, i.e. l'inverse de la cste de normalisation C.

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = \frac{p_0^2}{2m}$$

où $p_0 = m\omega x_0$.

$V(E)$ "Volume" occupé par les microétats d'énergie $\leq E$: surface ellipse

$$V(E) = \int_{H(x,p)\leq E} dxdp\, 1 = \pi x_0 p_0 = \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sqrt{2mE} = 2\pi E/\omega$$

$\int dxdp\, \rho^*(x,p) = 1$, donc

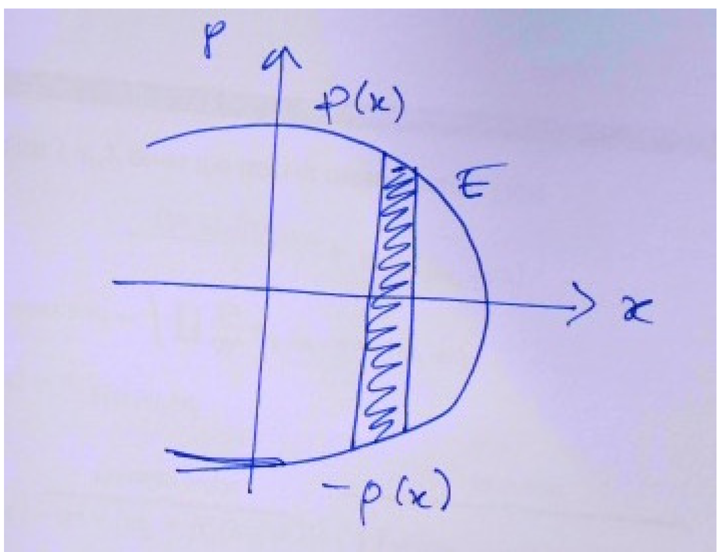
$$C\int_{E\leq H(x,p)\leq E+\delta E} dxdp = 1$$

$$C^{-1} = V(E+\delta E) - V(E) \simeq V'(E)\,\delta E = 2\pi\delta E/\omega$$

Point de vue "géométrique" pour calculer $w(x)$:

$$w(x)\,dx = \frac{\text{surface des 2 petites zones rouges}}{\text{surface coquille}}$$

Arc de l'ellipse : $p(x) = \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)}$



l'aire hachurée est $2p(x)dx$

$$\text{surface des 2 petites zones rouges} = \delta E\frac{d}{dE}(2\,p(x)\,dx) \tag{1}$$

$$= 2\,dx\,\delta E\frac{d}{dE}\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2} = 2m\,dx\,\delta E\frac{1}{\sqrt{E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2}} \tag{2}$$

$$= \sqrt{2m}\,dx\,\delta E\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}m\omega^2x_0^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2}} = \frac{dx\,\delta E 2/\omega}{\sqrt{x_0^2-x^2}} \tag{3}$$

d'où finalement

$$w(x)\,dx = \frac{dx\,\delta E 2/\omega}{2\pi\delta E/\omega\sqrt{x_0^2-x^2}}$$

et finalement on retrouve

$$w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

Conclusion :
à partir du postulat fondamental de la phys. statistique, on a retrouvé le résultat de la moyenne temporelle, mais ici **sans utiliser la dynamique**, avec un point de vue "géométrique" (identifier des volumes dans l'espace des phases).

L'intérêt : on voit bien comment généraliser l'approche de la physique statistique au cas de $D = 3N > 1$ degrés de liberté. En revanche, du côté de l'approche de la mécanique newtonienne, on est coincé !

Dans le cas général :

$$\rho^*(\vec{\Gamma}) = C \quad \text{si } E \leq H(\vec{\Gamma}) \leq E + \delta E$$