Corrigé examen janvier 23

Exercice 1 :

1. Il s'agit d'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ de fonctions positives, où $u_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{n}} \in [0,+\infty[$. Cette série converge donc simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $n = 0$, la fonction à intégrer est constante égale à 1, donc $I_0 = +\infty$. Supposons maintenant que $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement de variable $y = \sqrt{n}x$ (ou on invoque les propriétés d'invariance de l'intégrale). La fonction à intégrer étant positive, le théorème du changement de variable assure l'égalité $\sqrt{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, d\lambda(y)$. Puisque $I_1 = \sqrt{\pi}$, il suit que $I_n = \sqrt{\pi}/\sqrt{n}$.
3. La fonction $f = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est somme d'une série de fonctions (mesurables) positives. Le corollaire du théorème de convergence monotone pour les séries assure l'égalité
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\, d\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\, d\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{\pi}}{n} = +\infty\,.$$

Exercice 2 :

1. Soit $x > 0$. La fonction $u_x : t \mapsto \frac{1}{1+xt^2}$ est continue $\mathbb{R}$ (donc bornée sur les segments). Pour montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de montrer qu'elle est intégrable au voisinage de $\pm\infty$. La fonction de référence $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$. La majoration $0 \le \frac{1}{1+xt^2} \le \frac{1}{x}\,\frac{1}{t^2}$ (pour tout $t \neq 0$) assure donc que u_x est également intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. On va invoquer le théorème de continuité sous le signe intégrale.
   (a) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|h(x,t)| \le u_x(t)$, avec u_x intégrable. La fonction F est donc bien définie sur $]0,+\infty[$.
   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in\,]0,+\infty[\, \mapsto h(x,t) \in \mathbb{R}$ est continue.

   Sans information suplémentaire sur f, on ne pourra pas obtenir de domination uniforme en $x \in\,]0,+\infty[$. On commence donc par fixer $a > 0$, et par montrer la continuité de F sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

   (c) Soit $a > 0$. Pour $x \ge a$ et $t \in \mathbb{R}$, on a la domination $|h(x,t)| \le \frac{1}{1+at^2} = u_a(t)$ (puisque $|f| \le 1$) avec u_a intégrable sur $\mathbb{R}$.

   Le théorème s'applique donc pour montrer la continuité de F sur chaque intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

   La continuité est une propriété locale. On a $]0,+\infty[\, = \cup_{a>0}]a,+\infty[$, avec F continue sur chaque intervalle $]a,+\infty[$. Il suit que F est continue sur $]0,+\infty[$.
3. (a) Pour $x \ge 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on a les majorations
$$\frac{t^2}{(1+xt^2)^2} \le \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \le \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2}\,.$$

(b) On a vu précédemment que F est bien définie. Pour montrer qu'elle est de classe C^1, on cherche à appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale, dont on vérifie les hypothèses.

i. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in]0,+\infty[\mapsto h(x,t) \in \mathbb{R}$ est de classe C^1.

ii. Sa dérivée par rapport à x est $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\frac{t^2}{(1+xt^2)^2} f(t)$. On a donc, d'après la question précédente, pour tout $x \geq 1$ et tout réel t, la majoration

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| \leq \frac{t^2}{(1+xt^2)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} = u_1(t)\,.$$

La fonction u_1 étant intégrable, le théorème s'applique et montre que F est de classe C^1 sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

NB On peut même dériver sous le signe somme pour obtenir, pour tout $x > 1$, l'égalité

$$F'(x) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{t^2 f(t)}{(1+xt^2)^2}\, d\lambda(t)\,.$$

Exercice 3 :

1. (a) On applique le théorème de convergence monotone à la suite croissante de fonctions positives $(\frac{1}{1+x^2}\mathbb{1}_{[0,n]})$, puis on utilise le théorème fondamental de l'analyse pour l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Il vient donc

$$\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2}\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \frac{1}{1+x^2}\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \arctan n - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

(b) Soit $y > 0$. La fonction à intégrer est positive. Les propriétés d'invariance de l'intégrale assurent donc l'égalité $I(y) = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+y\,x^2}\, d\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{y}} I(1) = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$.

(c) Le changement de variable $x = \sqrt{t}$ assure l'égalité

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{1+t}\, d\lambda(t) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2}\, d\lambda(x)\,,$$

d'où le résultat puisque le singleton $\{0\}$ négligeable et donc $\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2}\, d\lambda(t) = \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2}\, d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}$.

2. On va utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour calculer l'intégrale de cette fonction (mesurable) positive. Il vient, en utilisant les résultats de la question précédente :

$$\begin{aligned} K &= \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+y} \left(\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+y\,x^2}\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+y}\, \frac{\pi}{2\sqrt{y}}\, d\lambda(y) = \frac{\pi^2}{2}\,. \end{aligned}$$

3. (a) Soit $x > 0$. L'intégrand $v_x : y \to \frac{1}{(1+y)(1+y\,x^2)}$ est positif (ou, au choix, continu sur le segment $[0,n]$), donc l'intégrale $h_n(x)$ est bien définie.

(b) Soit $x > 0$. La suite croissante de fonctions positives $(v_x \mathbb{1}_{[0,n]})$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction v_x. Le théorème de convergence monotone s'applique et montre que la suite $(h_n(x))$ converge vers $h(x) = \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{(1+y)(1+y\,x^2)}\, d\lambda$. On a donc convergence simple sur $[0, +\infty[$ de la suite de fonctions (h_n) vers h ainsi définie.

(c) La suite croissante de fonctions positives (h_n) converge donc simplement vers une fonction $h : [0, +\infty[\to [0, +\infty]$, et le théorème de convergence monotone s'applique pour donner l'égalité $J = \lim_{n\to\infty} J_n$.

4. (a) On réduit au même dénominateur pour obtenir l'identité demandée. En effet :

$$\frac{x^2}{1 + y\,x^2} - \frac{1}{1 + y} = \frac{x^2(1 + y) - (1 + yx^2)}{(1 + y\,x^2)(1 + y)} = \frac{x^2 - 1}{(1 + y\,x^2)(1 + y)} \,.$$

(b) Soit $x \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$. L'égalité $h_n(x) = \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{1+nx^2}{1+n}\right)$ suit de l'identité démontrée en 4a et du théorème fondamental de l'analyse, que l'on applique sur le segment $[0, n]$, puisque $y \mapsto \ln(1 + yx^2)$ et $y \mapsto \ln(1 + y)$ sont respectivement des primitives de $y \mapsto \frac{x^2}{1+y\,x^2}$ et $y \mapsto \frac{1}{1+y}$ sur $[0, n]$. On obtient en effet :

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \frac{1}{x^2 - 1} \int_{[0,n]} \frac{x^2}{1 + y\,x^2} - \frac{1}{1 + y}\, d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{x^2 - 1} \left(\ln(1 + yx^2)\Big]_0^n - \ln(1 + y)\Big]_0^n \right) \\ &= \frac{1}{x^2 - 1} \left(\ln(1 + nx^2) - \ln n \right) \,. \end{aligned}$$

(c) Pour $x \geq 0$ avec $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on peut ré-écrire $h_n(x) = \frac{1}{x^2-1} \ln\left(\frac{x^2+1/n}{1+1/n}\right)$ et, sous cette forme, il vient que $h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x) = \frac{2\ln x}{x^2-1}$ lorsque $x > 0$ avec $x \neq 1$, tandis que $h(0) = +\infty$.

5. Il s'agit donc, d'après les questions précédentes, de déterminer la valeur de

$$J = \int_{[0,+\infty[} \frac{2\ln x}{x^2 - 1}\, d\lambda(x) = \int_{[0,+\infty[} h(x)\, d\lambda(x) \,.$$

Cette a intégrale a bien un sens car la fonction $h : x \mapsto \frac{2\ln x}{x^2-1}$ prend des valeurs positives sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ (c'est immédiat de le constater directement, mais cela suit aussi de ce que les fonctions h_n sont positives).

Appliquons de nouveau le théorème de Fubini-Tonelli au calcul de l'intégrale K, mais cette fois-ci en intégrant en y "à l'intérieur". Le théorème s'applique, car l'intégrand est positif, et on obtient d'après les questions précédentes

$$\begin{aligned} K &= \int_{[0,+\infty[} \left(\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{(1 + y)(1 + y\,x^2)}\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\ &= \int_{[0,+\infty[} h(x)\, d\lambda(x) \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{[0,+\infty[} \frac{\ln x}{x^2 - 1}\, d\lambda(x) = \frac{K}{2} = \frac{\pi^2}{4} \,.$$