Corrigé du partiel Octobre 22

Question de cours : Voir le polycopié.

Exercice 1 :

1. Une fonction (mesurable) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable si sa valeur absolue $|h| : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ (qui est mesurable positive) est intégrable, c'est-à-dire si $\int_{\mathbb{R}} |h|\, d\lambda < +\infty$.
2. $$F : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \in [0, +\infty]\,.$$
   (a) La fonction F est positive, avec $F(x) \leq e^{-x}$ pour $x \geq 1$. La fonction de référence $x \mapsto e^{-x}$ étant intégrable sur $[0, +\infty[$, il suit que F est intégrable sur $[1, +\infty[\subset [0, +\infty[$.
   (b) La fonction de référence $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$. Pour $0 < x \leq 1$, on a $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Il suit que la fonction F est également intégrable sur $]0, 1]$.
3. (a) On a $f_n(0) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $x > 0$, on écrit $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x+(1/n)^2}}$.
   La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty]$ définie par $f(0) = +\infty$ et $f(x) = F(x)$ lorsque $x \neq 0$.
   (b) L'expression donnée en 3a nous permet de montrer que la suite de fonctions (mesurables) positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet, dans l'expression de $f_n(x)$ donné en 3a, le numérateur est fixe et positif, et le dénominateur décroît avec n. Le théorème de convergence monotone assure donc que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de leurs intégrales converge vers $I = \int_{[0,+\infty[} f\, d\lambda$. De plus, on sait que $f = F$ sur $]0, +\infty[$, la fonction F étant intégrable sur cet intervalle d'après la question précédente. On a donc, puisque $\int_{\{0\}} f\, d\lambda = 0$:
   $$I = \int_{[0,+\infty[} f\, d\lambda = \int_{]0,+\infty[} f\, d\lambda = \int_{]0,+\infty[} F\, d\lambda < +\infty\,.$$

Exercice 2 :

$$g_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$$

1. On a $g_n(0) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $x > 0$, on écrit $g_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x^2+(1/n^2)}}$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers la fonction $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty]$ définie par $g(0) = +\infty$ et $g(x) = 0$ lorsque $x > 0$.
   En effet, pour $x > 0$, le dénominateur $\sqrt{x^2 + (1/n^2)}$ converge vers x, tandis que e^{-nx} converge vers 0.
2. On a donc $\int_{[0,+\infty[} g\, d\lambda = \int_{]0,+\infty[} g\, d\lambda = 0$.
3. Les propriétés d'invariance de l'intégrale de Lebesgue pour une fonction mesurable positive nous donnent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les égalités
   $$J_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{ne^{-nx}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}\, d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 + x^2}}\, d\lambda(x) = J_1\,.$$
4. La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, elle converge donc vers J_1.
   Le théorème de convergence monotone ne s'applique pas ici : la suite de fonctions, bien que positive, n'est pas croissante.

Exercice 3 :

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction (mesurable) $x \mapsto x^{-n}\ln(x)$ prend des valeurs positives sur l'intervalle $[1,+\infty[$. Son intégrale $K_n = \int_{[1,+\infty[} x^{-n}\ln(x)\,d\lambda(x)$ a donc un sens, avec $K_n \in [0,+\infty]$.

   (b) i. La fonction ln tend vers $+\infty$ en $+\infty$, elle n'est donc pas intégrable (il suffit même d'observer que $\ln(x) \geq 1$ lorsque $x \geq \mathrm{e}$). On a donc $K_0 = +\infty$.

   ii. On sait que la fonction de référence $x \mapsto 1/x$ n'est pas intégrable au voisinage de l'infini. Or on a $x^{-1}\ln(x) \geq x^{-1}$ lorsque $x \geq \mathrm{e}$. Il suit donc que $K_1 = +\infty$.

   iii. Soit $n \geq 2$. Pour calculer K_2, on se ramène à intégrer la fonction $x \mapsto x^{-n}\ln(x)$ sur des segments sur lesquels on pourra effectuer, d'après le cours, une intégration par parties. La fonction $x \mapsto x^{-n}\ln(x)$ étant positive, un corollaire du théorème de convergence monotone assure en effet que

$$K_n = \lim_{p\to+\infty} \int_{[1,p]} x^{-n}\ln(x)\,d\lambda(x)\,.$$

   Pour chaque $p \geq 1$, on a (avec $u'(x) = x^{-n}$ et $v(x) = \ln(x)$ dans l'IPP)

$$\begin{aligned}
\int_{[1,p]} x^{-n}\ln(x)\,d\lambda(x) &= \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln(x)\Big]_1^p - \int_{[1,p]} \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\frac{1}{x}\,d\lambda(x) \\
&= \frac{p^{-n+1}}{-n+1}\ln(p) + \frac{1}{n-1}\int_{[1,p]} x^{-n}\,d\lambda(x) \\
&= \frac{p^{-n+1}}{-n+1}\ln(p) + \frac{1}{(n-1)^2}\left(1 - p^{-n+1}\right).
\end{aligned}$$

   Puisque $-n+1 < 0$, on a $p^{-n+1} \to 0$ lorsque $p \to +\infty$, ainsi que $p^{-n+1}\ln(p) \to 0$ par croissance comparée du logarithme et d'une fonction puissance. Il vient donc $K_n = (n-1)^{-2}$.

2. L'indication et le rappel nous incitent à écrire, lorsque $x > 1$ (et donc $0 < x^{-2} < 1$) :

$$\frac{\ln(x)}{x^2-1} = \frac{\ln(x)}{x^2}\,\frac{1}{1-x^{-2}} = \frac{\ln(x)}{x^2}\sum_{n\geq 0} x^{-2n} = \sum_{n\geq 0} \ln(x)\,x^{-(2n+2)}\,.$$

   Toutes les fonctions apparaissant dans cette série sont à valeurs positives. Un corollaire du théorème de convergence monotone assure donc l'égalité

$$\int_{]1,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,d\lambda(x) = \sum_{n\geq 0}\int_{]1,+\infty[} \ln(x)\,x^{-(2n+2)}\,d\lambda(x)$$

   Toute fonction étant intégrable sur un singleton, et d'intégrale nulle, il suit donc l'égalité

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,d\lambda(x) = \sum_{n\geq 0} K_{2n+2}$$

3. On a montré à la question 1b l'égalité $K_n = (n-1)^{-2}$. On a donc l'égalité

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,d\lambda(x) = \sum_{n\geq 0}(2n+1)^{-2}\,.$$

Dans la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$, regroupons séparément les termes correspondant à n pair ou impair. Il vient

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-2} + \sum_{n \geq 0} (2n+1)^{-2} = (1/4)\, S + \sum_{n \geq 0} (2n+1)^{-2}$$

et donc

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}\, d\lambda(x) = \sum_{n \geq 0} (2n+1)^{-2} = 3S/4 = \pi^2/8\,.$$