Corrigé du partiel

Question de cours. Rappeler la définition d'une fonction intégrable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Réponse. Une fonction (mesurable) positive $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est intégrable lorsque son intégrale $I = \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$, qui est toujours définie avec $I \in [0, +\infty]$, est finie i.e. lorsque $I \in [0, +\infty[$. Une fonction (mesurable) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable lorsque sa valeur absolue $f := |g|$ est intégrable au sens précédent.

Exercice 1 : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = e^{-x} \cos x$.
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $x \geq 0$ par $f_n(x) = f(nx)$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ que l'on explicitera.
2. (a) Montrer, pour tous $n \geq 1$ et $x \in [0, +\infty[$, l'inégalité $|f_n(x)| \leq e^{-x}$.
   (b) Montrer alors que chaque intégrale $\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda$ est bien définie, et qu'on a l'égalité $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} h\, d\lambda$.
3. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers h est-elle uniforme sur l'intervalle $[1, +\infty[$?
4. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers h est-elle uniforme sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Corrigé.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $f_n(x) = e^{-nx} \cos(nx)$. Pour montrer la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on doit distinguer selon que $x = 0$ ou pas. D'une part $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite 1. Supposons maintenant $x > 0$. On a alors $nx \to +\infty$ et donc $e^{-nx} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, tandis que $|\cos nx| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme produit d'une suite bornée par une suite tendant vers 0, il vient que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On conclut que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h = \mathbb{1}_{\{0\}}$.
2. (a) La fonction exponentielle est croissante. Pour tous $x \in [0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x \leq nx$ et donc $0 < e^{-nx} \leq e^{-x}$, tandis que $|\cos nx| \leq 1$. Tous les intervenants étant positifs, on en déduit que $|e^{-nx} \cos nx| = e^{-nx} |\cos nx| \leq e^{-x}$, comme demandé.
   (b) La fonction f_0 est constante égale à 1 (donc positive) et son intégrale est donc bien définie.
   Nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (continues donc mesurables) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En effet :
   – La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$.
   – La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dominée par la fonction intégrable $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ "de référence" définie pour $x \geq 0$ par $g(x) = e^{-x}$ (nous avons vu que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). Il suit que chaque f_n est également intégrable, et donc que $\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda$ est bien définie ($n \in \mathbb{N}^*$).
   Le théorème de convergence dominée affirme alors qu'on peut échanger limite et intégrale. La suite des intégrales des f_n converge donc, avec
   $$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_{[0,+\infty[} f_n\, d\lambda \Big) = \int_{[0,+\infty[} (\lim_{n\to\infty} f_n)\, d\lambda = 0\,.$$
   (Par normalisation de l'intégrale, on a $\int_{[0,+\infty[} h\, d\lambda = \int_{[0,+\infty[} \mathbb{1}_{\{0\}} d\lambda = 0.$)
3. La convergence est uniforme sur $[1, +\infty[$. En effet, $h = 0$ sur $[1, +\infty[$ donc
   $$\sup_{x\in[1,+\infty[} |h(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in[1,+\infty[} |e^{-nx} \cos x| \leq e^{-n} \to_{n\to\infty} 0\,.$$
4. Chaque fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$, tandis que la limite h est discontinue : la convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers h ne peut pas être uniforme sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit

$$J = \int_{]0,+\infty[} (\cos^2 x)\, \frac{e^{-x}}{x}\, d\lambda(x) \quad \text{et} \quad I_n = \int_{]0,+\infty[} (\cos^2 x)\, \frac{n\, e^{-x}}{1+nx}\, d\lambda(x)\,.$$

1. Justifier le fait que les intégrales J et I_n (pour $n \in \mathbb{N}$) ont bien un sens.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la fonction $x \to \frac{n}{1+nx}$ est bornée sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
   (b) Montrer alors que $I_n \in [0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $(\cos^2 x)\, e^{-x} \geq 1/2$ lorsque $0 \leq x \leq a$.
   On pourra commencer par évaluer la fonction $x \to (\cos^2 x)\, e^{-x}$ en $x = 0$.
   (b) Montrer alors que $J = +\infty$.
4. (a) Étudier la convergence simple, lorsque $n \to \infty$, de la suite de fonctions $g_n :]0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définies pour $x > 0$ par $g_n(x) = (\cos^2 x)\, \dfrac{n\, e^{-x}}{1+nx}$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$.

Corrigé.

1. Il s'agit, dans les deux cas, de l'intégrale d'une fonction (continue donc mesurable) à valeurs positives. L'intégrale est donc bien définie, à valeurs dans $[0,+\infty]$.
2. (a) Pour $x \geq 0$, on a $1 + nx \geq 1$ et donc $\frac{n}{1+nx} \leq n$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Il suit de 2a que $0 \leq (\cos^2 x)\, \dfrac{n\, e^{-x}}{1+nx} \leq ne^{-x}$ pour tout $x \geq 0$. La fonction $h : x \to e^{-x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (ou sur $[0,+\infty[$, c'est la même chose). La fonction $g_n : x \to (\cos^2 x)\, \dfrac{n\, e^{-x}}{1+nx}$, vérifiant l'encadrement $0 \leq g_n \leq nh$ sur $[0,+\infty[$, l'est également : l'intégrale I_n est donc finie.
3. (a) La fonction $x \to (\cos^2 x)\, e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ est prend la valeur 1 en 0. Il existe donc $a > 0$ tel que $|(\cos^2 x)\, e^{-x} - 1| \leq 1/2$, et donc $(\cos^2 x)\, e^{-x} \geq 1/2$, lorsque $0 \leq x \leq a$.
   (b) La fonction $x \to 1/x$ (fonction de référence) n'est pas intégrable au voisinage de 0 : pour tout $a > 0$, on a $\int_{]0,a]} \frac{1}{x}\, d\lambda(x) = +\infty$. La croissance de l'intégrale des fonctions positives assure donc que

$$J = \int_{]0,\infty[} (\cos^2 x)\, \frac{e^{-x}}{x}\, d\lambda(x) \geq \int_{]0,a]} (\cos^2 x)\, \frac{e^{-x}}{x}\, d\lambda(x) \geq \int_{]0,a]} \frac{1}{2x}\, d\lambda(x) = +\infty\,.$$

4. (a) On factorise par n au numérateur et au dénominateur et l'on obtient, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'égalité

$$g_n(x) = (\cos^2 x)\, \frac{n\, e^{-x}}{1+nx} = (\cos^2 x)\, \frac{e^{-x}}{x + (1/n)}\,. \tag{1}$$

   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement, lorsque $n \to \infty$, vers la fonction définie par $g : x \in]0,+\infty[\to (\cos^2 x)\, \dfrac{e^{-x}}{x} \in [0,+\infty[$.
   (b) De plus, l'expression (1) assure que la suite de fonctions positives $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions. Le théorème de convergence monotone s'applique donc, et montre l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} g_n\, d\lambda = \int_{]0,\infty[} (\lim_{n\to\infty} g_n)\, d\lambda = \int_{]0,\infty[} g\, d\lambda = +\infty\,.$$

Exercice 3 :

1. Justifier l'existence de l'intégrale $J = \int_{[0,+\infty[} xe^{-x}\, d\lambda(x)$, puis la calculer (n'omettez pas de justifier soigneusement toutes les étapes de votre calcul).
2. Soient $a, b \in]0,+\infty[$ deux réels strictement positifs.
   (a) Pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{x\, e^{-ax}}{1-e^{-bx}}\, d\lambda(x)$ est-elle bien définie ?
   (b) On rappelle l'identité $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$, valable pour tout réel u tel que $|u| < 1$.
   On admet également l'égalité $\int_{]0,+\infty[} xe^{-\alpha x}\, d\lambda(x) = 1/\alpha^2$ pour tout $\alpha > 0$.

   Justifier alors l'égalité

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{x\, e^{-ax}}{1-e^{-bx}}\, d\lambda(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(a+bn)^2}\,.$$

Corrigé.

1. Notons $f : x \in [0,+\infty[\to xe^{-x} \in [0,+\infty[$. Comme intégrale d'une fonction positive, $\int_{[0,+\infty[} f\, d\lambda$ est bien définie, a priori à valeurs dans $[0,+\infty]$. Puisque f est positive, le théorème de convergence monotone s'applique à la suite croissante de fonctions positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $f_n = f\mathbb{1}_{[0,n]}$, qui converge simplement vers f. On a donc

$$\int_{[0,+\infty[} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} xe^{-x}\, d\lambda(x)\,.$$

Pour calculer l'intégrale de f, qui est de classe C^1, sur le segment $[0,n]$ on peut intégrer par parties. Il vient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{[0,n]} xe^{-x}\, d\lambda(x) = [-xe^{-x}]_0^n + \int_{[0,n]} e^{-x}\, d\lambda(x) = -ne^{-n} + (1-e^{-n})\,.$$

Puisque $ne^{-n} \to_{n\to\infty} 0$, il vient donc $\int_{[0,+\infty[} xe^{-x}\, d\lambda(x) = 1$.

2. (a) Il s'agit de nouveau de l'intégrale d'une fonction (continue donc mesurable) positive.
   (b) Pour $x > 0$, on a $0 < e^{-bx} < 1$. On applique applique alors l'identité $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$ avec $u = e^{-bx}$. Il vient, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\frac{x\, e^{-ax}}{1-e^{-bx}} = x\, e^{-ax} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-bx})^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-(a+nb)x}\,.$$

Le corollaire du théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions (mesurables) à valeurs positives s'applique et affirme que

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{x\, e^{-ax}}{1-e^{-bx}}\, d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-(a+nb)x}\, d\lambda(x) = \sum_{n\geq 0} \int_{]0,+\infty[} xe^{-(a+nb)x}\, d\lambda(x)$$

et le rappel (pour $\alpha = a + nb$) permet alors de conclure que

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{x\, e^{-ax}}{1-e^{-bx}}\, d\lambda(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(a+bn)^2}\,.$$