MDD302 (2021-22) Université Paris-Saclay

Partiel du 9/11/21 – Durée 2 heures

Documents (y compris électroniques) interdits.
Calculatrices, objects connectés et téléphones éteints, rangés dans des sacs fermés.

Soigner la rédaction. Enoncer précisément les théorèmes utilisés, et vérifier soigneusement que les hypothèses sont satisfaites.
On peut admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

On rappelle que les fonctions $x \in [0,+\infty[\to e^{-x} \in [0,+\infty[$ et $x \in]0,1] \to x^a \in [0,+\infty[$ (pour $a \in \mathbb{R}$) figurent parmi les "fonctions de référence" du cours. Vous pouvez donc utiliser leurs propriétés d'intégrabilité ou de non-intégrabilité sans les re-démontrer : il vous suffit de citer clairement le résultat lorsque vous l'utilisez.

Question de cours. Rappeler la définition d'une fonction intégrable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 1 :

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \geq 0$ par $f(x) = e^{-x}\cos x$.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $x \geq 0$ par $f_n(x) = f(nx)$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $h : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ que l'on explicitera.
2. (a) Montrer, pour tous $n \geq 1$ et $x \in [0,+\infty[$, l'inégalité $|f_n(x)| \leq e^{-x}$.
   (b) Montrer alors que chaque intégrale $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$ est bien définie ($n \in \mathbb{N}$), et qu'on a l'égalité $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda$.
   (c) Déterminer alors cette limite.
3. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers h est-elle uniforme sur l'intervalle $[1,+\infty[$?
4. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers h est-elle uniforme sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

T.S.V.P.

Exercice 2 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit

$$J = \int_{]0,+\infty[} (\cos^2 x)\, \frac{e^{-x}}{x}\, d\lambda(x) \quad \text{et} \quad I_n = \int_{]0,+\infty[} (\cos^2 x)\, \frac{n\, e^{-x}}{1+nx}\, d\lambda(x)\,.$$

1. Justifier le fait que les intégrales J et I_n (pour $n \in \mathbb{N}$) ont bien un sens.
2. On fixe $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la fonction $x \to \frac{n}{1+nx}$ est bornée sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer alors que $I_n \in [0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $(\cos^2 x)\, e^{-x} \geq 1/2$ lorsque $0 \leq x \leq a$.
   On pourra commencer par évaluer la fonction $x \to (\cos^2 x)\, e^{-x}$ en $x = 0$.
   (b) Montrer alors que $J = +\infty$.
4. (a) Étudier la convergence simple, lorsque $n \to \infty$, de la suite de fonctions $g_n :]0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définies pour $x > 0$ par $g_n(x) = (\cos^2 x)\, \dfrac{n\, e^{-x}}{1+nx}$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to\infty} I_n = +\infty$.

Exercice 3 :

1. Justifier l'existence de l'intégrale $J = \int_{[0,+\infty[} xe^{-x}\, d\lambda(x)$, puis la calculer (n'omettez pas de justifier soigneusement toutes les étapes de votre calcul).
2. Soient $a, b \in]0, +\infty[$ deux réels strictement positifs.
   (a) Pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{x\, e^{-ax}}{1 - e^{-bx}}\, d\lambda(x)$ est-elle bien définie ?
   (b) On rappelle l'identité $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n$, valable pour tout réel u tel que $|u| < 1$.
   On admet également l'égalité $\int_{]0,+\infty[} xe^{-\alpha x}\, d\lambda(x) = 1/\alpha^2$ pour tout $\alpha > 0$.

   Justifier alors l'égalité

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{x\, e^{-ax}}{1 - e^{-bx}}\, d\lambda(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(a+bn)^2}\,.$$