Examen du 11/1/19 – Durée 2 heures

Documents (y compris électroniques) interdits.
Calculatrices, objects connectés et téléphones éteints et rangés dans des sacs fermés.

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour $t \geq 0$, on pose

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1 + tf^2(x)}\, dx\,.$$

1. QUESTION DE COURS. Rappeler la définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable.
2. Justifier, pour tous réels positifs $a, t \in [0, \infty[$, l'inégalité $\frac{a}{1+ta^2} \leq a$.
3. Montrer que la fonction $F : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est bien définie.
4. Montrer que la fonction $F : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue.
5. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la quantité $\frac{a}{1+ta^2}$ a une limite, que l'on déterminera, lorsque $t \to +\infty$.
   (b) Montrer que $F(t)$ a une limite, que l'on déterminera, lorsque $t \to +\infty$.
   On pourra étudier la suite des images $(F(t_n))$ d'une suite de réels positifs $t_n \to \infty$.

Exercice 2 :

1. QUESTION DE COURS.
   (a) Rappeler la définition de l'espace $\mathcal{L}^2_{2\pi}$.
   (b) Soit $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$.
      i. Rappeler la définition de $\|f\|_2$.
      ii. Rappeler la définition des coefficients de Fourier de f.
   (c) Enoncer l'identité de Parseval.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(t) = -1$ si $-\pi < t < 0$ et $f(t) = 1$ si $0 \leq t \leq \pi$.
   (a) Dessiner le graphe de f sur l'intervalle $]-3\pi, 3\pi]$.
   (b) Montrer que les coefficients de Fourier de f vérifient $c_n(f) = 0$ pour n pair et $c_n(f) = \frac{2}{i\pi n}$ pour n impair. On justifiera très soigneusement tous les calculs.
   (c) Calculer $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
   (d) En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

T.S.V.P.

Exercice 3 : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes. On peut utiliser le résultat d'une de ces questions pour traiter les suivantes. On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

1. Justifier le fait que la fonction $h : y \in \mathbb{R} \to \frac{\cos(y)}{1+y^2} \in \mathbb{R}$ est intégrable.

On note $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(y)}{1+y^2}\,dy$. On ne cherchera pas à calculer explicitement I.

2. Question de cours. Donner la définition d'un C^1-difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
3. (a) Montrer que l'application $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (2x+y, y) \in \mathbb{R}^2$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
   (b) Déterminer la matrice jacobienne et le déterminant jacobien de φ en chaque point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4. On introduit les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{-x^2}\,\frac{\cos(y)}{1+y^2} \quad \text{et} \quad g(x,y) = e^{-(2x+y)^2}\,\frac{\cos(y)}{1+y^2}\,.$$

   (a) Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est intégrable.
   (b) En déduire que la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est intégrable.
   On pourra utiliser le changement de variable φ.
   (c) Montrer alors l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x+y)^2}\,\frac{\cos(y)}{1+y^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{\pi}\,I}{2}\,.$$

5. *Question facultative, sans indication, à n'aborder que lorsque le reste du problème est entièrement et correctement traité.*
   Démontrer l'égalité $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.