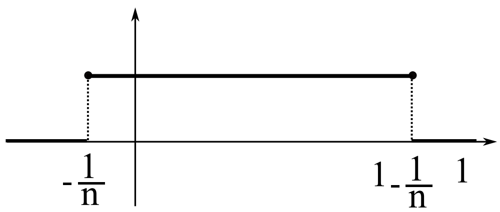
Exercice 1 : La fonction f est continue sur l'intervalle $]0,\infty[$; elle y admet donc une primitive. Construisons par exemple la primitive F de f qui s'annule en $x=1$. On a, par intégration par parties (avec $u'=t^2$ et $v=\ln(t)$) et puisque $\ln(1)=0$:

$$F(x)=\int_1^x t^2\ln(t)\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_1^x-\int_1^x\frac{t^3}{3}\frac{1}{t}\,dt=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{9}(x^3-1)\,.$$

Exercice 2 :

Pour comprendre ce qui se passe, il est vivement conseillé de commencer par tracer les graphes des fonctions f_n.
On obtient le dessin ci-contre.



Montrons que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f:=\mathbb{1}_{[0,1[}$. Pour ce faire, nous allons étudier la suite réelle $(f_n(x))_{n\geq 1}$ successivement lorsque $x<0$, puis lorsque $0\leq x<1$, et enfin lorsque $1\leq x$ et montrer dans chacun de ces trois cas que $f_n(x)\to f(x)$ lorsque $n\to\infty$.

- Soit $x<0$. Puisque $-\frac{1}{n}\to 0$ lorsque $n\to\infty$, on a $x<-\frac{1}{n}$ lorsque n est assez grand – plus précisément, c'est le cas lorsque $\frac{1}{n}<|x|$ ou, de façon équivalente, lorsque $n>\frac{1}{|x|}$. On en déduit que la suite $(f_n(x))$ est stationnaire, nulle à partir d'un certain rang : elle converge donc vers $0=f(x)$.
- Soit $0\leq x<1$. Puisque $1-\frac{1}{n}\to 1$ lorsque $n\to\infty$, on a $-\frac{1}{n}<0\leq x\leq 1-\frac{1}{n}$ dès que n est assez grand – plus précisément, c'est le cas dès que $\frac{1}{n}<1-x$ ou, de façon équivalente, lorsque $n>1/(1-x)$. On en déduit que la suite $(f_n(x))$ est stationnaire, et vaut 1 à partir d'un certain rang : elle converge donc vers $1=f(x)$.
- Soit enfin $1\leq x$. On a, pour tout entier $n\geq 1$, l'inégalité stricte $1-\frac{1}{n}<x$ et donc la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 0 : elle converge donc vers $f(x)=0$ lorsque $n\to\infty$.

Exercice 3 :

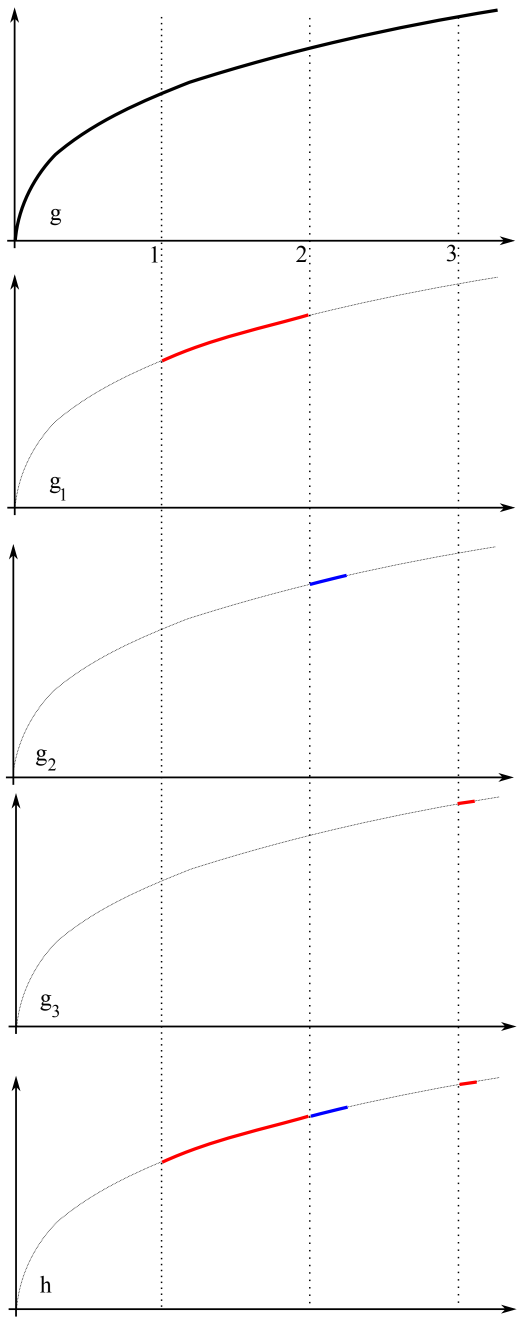
1. Voir le dessin ci-après pour les graphes de g, g_1, g_2, g_3 et enfin h : les graphes sont en gras, les pointillés sont là pour mémoire.

2. (a) La fonction g admet pour primitive $t \to \frac{2}{3}t^{3/2}$. On a donc

$$J_n = \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} \sqrt{t}\,dt = \Big[\frac{2}{3}t^{3/2}\Big]_n^{n+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}\Big((n+\frac{1}{n^2})^{3/2} - n^{3/2}\Big)\,.$$

(b) En factorisant l'expression précédente, puis en utilisant l'indication (licite puisque $0 \le \frac{1}{n^3} \le 1$), il vient

$$J_n = \frac{2}{3}n^{3/2}\left((1+\frac{1}{n^3})^{3/2} - 1\right) \le \frac{2}{3}n^{3/2}\,3\,n^{-3} = 2\,n^{-3/2}\,.$$



3. (a) Pour $n \ge 1$, on a $1/n^2 \le 1$, d'où l'inclusion $[n, n+\frac{1}{n^2}[\ \subset [n, n+1[$. Les intervalles $[n, n+\frac{1}{n^2}[$ $(n \ge 1)$ sont donc deux à deux disjoints puisque les intervalles $[n, n+1[$ $(n \ge 1)$ le sont : un réel x appartient donc à au plus un de ces intervalles.

(b) Soit x un réel. Dans la série numérique $\sum g_n(x)$, il suit de la question précédente qu'un des termes au plus est non nul (correspondant alors à l'unique indice $n \ge 1$ pour lequel $x \in [n, n+\frac{1}{n^2}[$). La série $\sum g_n(x)$ est donc convergente.

Nous avons bien montré que la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement.

(c) Voir le dessin ci-dessus pour le graphe de $h = \sum g_n$.

4. La fonction h est somme d'une série de fonctions positives (mesurables) g_n. Les g_n étant positives, le corollaire du théorème de convergence monotone vu en cours assure qu'on peut échanger somme et intégrale, et donc que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(t)\,dt &= \int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{n\ge1} g_n(t)\Big)\,dt\\ &= \sum_{n\ge1}\Big(\int_{\mathbb{R}} g_n(t)\,dt\Big)\\ &= \sum_{n\ge1} J_n\,.\end{aligned}$$

Attention, écrire l'égalité $\int_{\mathbb{R}}\Big(\sum_{n\geq 1} g_n(t)\Big)\,dt = \sum_{n\geq 1}\Big(\int_{\mathbb{R}} g_n(t)\,dt\Big)$ dans la question 4. ci-dessus sans la justifier par le théorème de convergence monotone (ou son corollaire) – licite puisque les g_n sont positives – vous fait perdre les points associés à cette question. De même dans l'exercice 4, question 2.

5. (a) Une fonction (mesurable) positive $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ est intégrable lorsque son intégrale (qui est toujours définie, mais a priori à valeurs dans $[0,+\infty]$) est finie.
   (b) Une fonction (mesurable) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable lorsque sa valeur absolue $|f| : \mathbb{R} \to [0,\infty[\subset [0,+\infty]$ est intégrable au sens précédent.
6. Ici la fonction h est positive. Elle est intégrable si et seulement si son intégrale $\int_{\mathbb{R}} h(t)\,dt = \sum_{n\geq 1} J_n < \infty$ est finie (nous venons d'utiliser la question 4).

   Rappelons que $0 < J_n \leq 2n^{-3/2}$. D'après le rappel en haut d'énoncé, la série $\sum_{n\geq 1} n^{-3/2}$ est convergente. Par comparaison de ces séries à termes positifs, il suit que la série $\sum_{n\geq 1} J_n$ est également convergente. Ainsi, la fonction h est intégrable.
7. La fonction h est intégrable. Par contre, $h(t)$ ne tend pas vers 0 lorsque $t \to +\infty$. En effet, on a notamment $h(n) = \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$.

   Bien entendu, il y a plein d'autres exemples. On peut penser notamment à la fonction indicatrice des entiers $\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$, ou même construire une fonction continue et intégrable $f : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ qui ne tende pas vers 0 à l'infini. Voir également l'exercice bonus 10, feuille 3.

8. On peut donner plusieurs démonstrations.

   Soit on remarque que la dérivée de la fonction $u : t \in [0,1] \to (1+t)^{3/2} \in \mathbb{R}$ est $u'(t) = \frac{3}{2}(1+t)^{1/2} \leq 3$ pour tout $0 \leq t \leq 1$, et on utilise le théorème des accroissements finis.

   Ou bien on développe avec la formule du binôme et on majore grossièrement en utilisant le fait que $s^3 \leq s^2 \leq s$ lorsque $0 \leq s \leq 1$. Il vient alors

$$(1+s)^3 = 1 + 3s + 3s^2 + s^3 \leq 1 + 6s + s^2 \leq (1+3s)^2\,.$$

Exercice 4 :

1. On a vu en cours que
$$n\, I_n = n \int_{\mathbb{R}} f(nt)\, dt = I\,.$$
L'assertion demandée suit, en prenant $a_n = 1/n$.

> Si vous ne vous souvenez pas de l'identité $|s| \int_{\mathbb{R}} f(st)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt$ (pour $s \neq 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$), vous pouvez retrouver la valeur de la constante a_n en testant sur une fonction intégrable "bien choisie", c'est-à-dire pour laquelle les calculs se mènent bien.
> Par exemple, pour $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$, on obtient $f_n(t) := f(nt) = \mathbb{1}_{[0,1/n]}(t)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, avec donc $I_n = \int f_n = (1/n)I$.

2. La fonction g est somme d'une série de fonctions (mesurables) positives.
Le corollaire du théorème de convergence monotone vu en cours assure donc qu'on peut échanger somme et intégrale pour calculer l'intégrale de g. On obtient alors
$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{n\geq 1} (1/n) f(nt) \Big)\, dt = \sum_{n\geq 1} \Big(\int_{\mathbb{R}} (1/n) f(nt)\, dt \Big)\,.$$
La linéarité de l'intégrale, puis la question précédente donnent alors
$$\int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt = \sum_{n\geq 1} \Big(\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f(nt)\, dt \Big) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\, I_n = \sum_{n\geq 1} \frac{I}{n^2} = (\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2})\, I\,.$$
On a supposé la fonction f intégrable, c'est-à-dire que $0 \leq I < \infty$. Puisque $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$, on a $\int_{\mathbb{R}} g(t)\, dt < \infty$: c'est donc que la fonction positive g est intégrable.

3. On a la majoration $\infty \mathbb{1}_A \leq g$, puisque $g(t) \geq 0$ partout et $g(t) = \infty$ lorsque $t \in A$. Par croissance de l'intégrale, il vient
$$\infty \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda < \infty$$
et donc A est négligeable, c'est-à-dire que $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A\, d\lambda = 0$.

4. Soit maintenant $t \in \mathbb{R} \setminus A$, de sorte que $g(t) = \sum_{n\geq 1} (1/n)\, f(nt) < \infty$. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Il suit, comme annoncé, que $(1/n)\, f(nt) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.