Partiel du 09/11/18 – Durée 2 heures

Documents (y compris électroniques) interdits.
Calculatrices, objects connectés et téléphones éteints et rangés dans des sacs fermés.

Soigner la rédaction. Enoncer précisément les théorèmes utilisés, et vérifier soigneusement que les hypothèses sont satisfaites.
On peut admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

On rappelle que la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^a$ converge si et seulement si $a > 1$.

Exercice 1 :

Déterminer une primitive $F :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ de la fonction $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $t > 0$ par $f(t) = t^2 \ln(t)$.

Exercice 2 :

On introduit la suite de fonctions $f_n := \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (pour $n \geq 1$).

Cette suite converge-t-elle simplement ? Si oui, justifier soigneusement en précisant la limite.

Exercice 3 :

Soit $n \geq 1$. On définit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $g_n(t) = \sqrt{t}$ lorsque $n \leq t < n + \dfrac{1}{n^2}$ et $g_n(t) = 0$ sinon.

1. Dessiner le graphe de la fonction $g : t \in [0, \infty[\to \sqrt{t} \in \mathbb{R}$, puis les graphes de g_1, g_2 et g_3.
2. (a) Calculer l'intégrale $J_n := \int_{\mathbb{R}} g_n(t)\, dt$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) En déduire la majoration $J_n \leq 2\, n^{-\frac{3}{2}}$ pour tout $n \geq 1$.
   On pourra utiliser, sans la démontrer, l'inégalité $1 \leq (1+s)^{3/2} \leq 1 + 3s$ valable pour tout $0 \leq s \leq 1$.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe au plus un entier $n \geq 1$ tel que $n \leq x < n + \frac{1}{n^2}$.
   On pourra utiliser le fait que les intervalles $I_n := [n, n+1[$ (pour $n \geq 1$) sont deux à deux disjoints.
   (b) Montrer alors que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge simplement vers une fonction $h := \sum_{n\geq 1} g_n : \mathbb{R} \to [0, \infty[$.
   On ne demande pas d'expliciter h.
   (c) Esquisser le graphe de h. On ne demande pas de justification.

T.S.V.P.

4. Exprimer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h(t)\, dt$ comme somme d'une série numérique. Justifier soigneusement.
5. Question de cours.
   (a) Rappeler la définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ intégrable.
   (b) Rappeler la définition d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable.
6. La fonction h définie dans la question 3. est-elle intégrable ?
7. Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction intégrable. Est-il vrai que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$?
   Si la réponse est oui, on demande une démonstration. Si la réponse est non, on demande un contre-exemple.
8. Question facultative, à ne traiter qu'après avoir fini tous les exercices !
   Montrer l'inégalité utilisée dans la question 2b : $1 \leq (1 + s)^{3/2} \leq 1 + 3s$ pour $0 \leq s \leq 1$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction positive et intégrable. On note $I := \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt$.

1. Question de cours. Soit $n \geq 1$. On note $I_n := \int_{\mathbb{R}} f(nt)\, dt$.
   Expliciter la valeur de la constante a_n, qui ne dépend pas de la fonction considérée f, telle que l'on ait $I_n = a_n\, I$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $g(t) = \sum_{n\geq 1} (1/n)\, f(nt)$.
   Démontrer, en justifiant soigneusement toutes les étapes du raisonnement, que la fonction g est intégrable.
3. Question de cours.
   Soit $A = \{t \in \mathbb{R} \,|\, g(t) = +\infty\}$. Démontrer que A est négligeable, c'est-à-dire que $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t)\, dt = 0$, où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de A.
4. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus A$, on a $\lim_{n\to\infty} (1/n) f(nt) = 0$.