## Exercice 1 :

1. Une fonction (mesurable) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$.
2. Puisque $a, t \geq 0$, on a $1 + ta^2 \geq 1$ et donc (parce que $a \geq 0$) $\frac{a}{1+ta^2} \leq a$.
3. On introduit, pour $t \geq 0$, la fonction $f_t : x \in \mathbb{R} \to \frac{f(x)}{1+tf^2(x)} \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La question précédente, appliquée à $a = |f(x)|$ montre que $|f_t(x)| \leq |f(x)|$. Puisque $f$ est supposée intégrable, $f_t$ l'est aussi, donc $F(t)$ est bien définie.
4. On applique le théorème de continuité sous le signe somme. En effet :
   — **domination et intgrabilité :** pour chaque $t \geq 0$, on a $|f_t| \leq |f|$ avec $f$ intégrable ; ceci assure donc que chaque $f_t$ est intgrable ;
   — **continuité :** pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in [0, \infty[ \to f_t(x) = \frac{f(x)}{1+tf^2(x)} \in \mathbb{R}$ est continue.

   Il suit que $F$ est continue.
5. (a) On va montrer que $\frac{a}{1+ta^2} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Le résultat est immédiat lorsque $a = 0$, puisqu'alors $\frac{a}{1+ta^2}a = 0$ pour tout $t \geq 0$. Lorsque $a \neq 0$, le numérateur de la fraction est fixe, tandis que le dénominateur tend vers l'infini lorsque $t \to \infty$, et le résultat annoncé suit.

   (b) Soit $(t_n)$ une suite de réels positifs tendant vers $\infty$. La suite de fonctions $(f_{t_n})$ tend simplement vers 0 (question 5a) , et elle est dominée par $|f|$ (question 3). Le théorème de convergence dominée appliquée à la suite $(f_{t_n})$ assure que $F(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

   Par caractérisation séquentielle de la limite, le résultat suit.

## Exercice 2 :

1. (a) Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dans $\mathcal{L}^2_{2\pi}$ si elle est $2\pi$-périodique et de carré intégrable sur une période, c'est-à-dire si $\int_0^{2\pi} |f|^2 < \infty$.

   (b) i. Pour $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$, on définit $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^2\right)^{1/2}$.

   ii. Pour $n \in \mathbb{Z}$, le $n$-ième coefficient de Fourier de $f$ est défini par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\,.$$

   (c) L'identité de Parseval affirme qu'on a, pour toute $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$, l'égalité

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\,.$$

2. (a) La fonction $f$ est impaire, donc d'intégrale nulle sur une période. Il suit donc que $c_0(f) = 0$.

Supposons désormais $n \in \mathbb{Z}^*$. On a

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \int_{-\pi}^{0} -e^{-int}\, dt + \int_0^\pi e^{-int}\, dt = \left[\frac{-e^{-int}}{-in}\right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^\pi \\ &= \frac{-2i}{n}(1-(-1)^n)\,. \end{aligned}$$

Si $n$ est pair, on a donc $c_n(f) = 0$.

Lorsque $n$ est impair, il vient $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{2}{in}2 = \dfrac{2}{i\pi n}$.

(b) On écrit la formule de Parseval pour $f$. D'une part $\|f\|_2^2 = 1$. Pour l'autre membre, les termes correspondant à pair sont nuls et on obtient en regroupant par deux les termes correspondant à $n = 2k+1$ impair, et puisque $|c_n| = |c_{-n}|$ :

$$1 = 2\sum_{k=0}^{\infty} |c_{2k+1}|^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2k+1)^2}\,,$$

soit $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(c) Dans la série $S = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$, on sépare les termes correspondant à $n = 2k$ pair ($k \geq 1$) et à $n = 2k+1$ impair ($k \geq 0$). Il vient

$$S = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Donc $\frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$ et finalement $S = \frac{\pi^2}{6}$.

## Exercice 3 :

1. On a $|h(y)| \leq \frac{1}{1+y^2}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Il suit, par parité de $y \to 1+y^2$ :

$$\int_{\mathbb{R}} |h| \leq 2\int_0^1 1\, dt + \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt < \infty$$

puisque $t \to \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,\infty[$. Donc $h$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un $C^1$ difféomorphisme si
   — $\varphi$ est de classe $C^1$
   — $\varphi$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même
   — la réciproque $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est également de classe $C^1$.

3. (a) L'application $\varphi$ est linéaire donc de classe $C^1$. Elle est bijective (la matrice associée à cette application linéaire est inversible), et sa réciproque est également linéaire donc de classe $C^1$.

(b) La matrice jacobienne de $\varphi$ est constante : on a $\mathrm{Jac}_{(x,y)}\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et $\det \mathrm{Jac}_{(x,y)}\varphi = 2$.

4. (a) On veut montrer que la fonction positive $|f|$ est intégrable. Pour cela, on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli. On trouve

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| \, dxdy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\cos(y)|}{1 + y^2} \right) < \infty$$

puisque $x \to e^{-x^2}$ et $y \to \frac{|\cos(y)|}{1+y^2}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(b) (c) On observe que $g = f \circ \varphi$. Le théorème du changement de variable pour la fonction intégrable $f$ assure que $2g = (\det \mathrm{Jac}_{(x,y)}\varphi) \; f \circ \varphi$ est intégrable, avec

$$2 \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} (\det \mathrm{Jac}_{(x,y)}\varphi) \; f \circ \varphi(x, y) \, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dxdy \, .$$

On a vu que $f$ est intégrable. On peut donc lui appliquer le théorème de Fubini. Il vient

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} \frac{\cos(y)}{1 + y^2} \, dxdy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(y)}{1 + y^2} \right) = \sqrt{\pi} I \, ,$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(2x+y)^2} \frac{\cos(y)}{1 + y^2} \, dxdy = \frac{\sqrt{\pi} I}{2} \, .$$