Corrigé de l'examen 2020

Exercice 1 :

1. La fonction $g : t \in [0,+\infty[\to \frac{1}{1+t^2} \in [0,+\infty[$ est (mesurable) positive, donc son intégrale $\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2}\, d\lambda(t) \in [0,+\infty]$ est bien définie.
   Par le théorème de convergence monotone appliqué à la suite croissante de fonctions positives $g_n = g\mathbb{1}_{[0,n]}$, on a $\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2}\, d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{1+t^2}\, d\lambda(t)$. La fonction continue g admettant pour primitive $t \to \tan t$, on a pour pour tout $n \in \mathbb{N}$ les égalités : $\int_{[0,n]} \frac{1}{1+t^2}\, d\lambda(t) = \int_0^n \frac{1}{1+t^2}\, dt = \tan(n) - \tan(0) = \tan(n)$, et donc $\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+t^2}\, d\lambda(t) = \pi/2$.
   La fonction positive g est donc intégrable sur $[0,+\infty[$ (son intégrale y est finie).

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $t \in [0,+\infty[$, l'encadrement $0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$. Puisque g est intégrable sur $[0,+\infty[$ (question 1), il suit par comparaison de fonctions positives que $t \to \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

3. Pour montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, nous appliquons le théorème de continuité sous le signe intégrale à la fonction continue $f : (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[\to \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \in \mathbb{R}$. En effet les hypothèses de ce théorème sont bien vérifiées :
   * On a la domination $|f(x,t)| \leq g(t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction g étant intégrable sur $[0,+\infty[$ (et donc $t \to f(t,x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout x, i.e. F est bien définie !).
   * Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \in \mathbb{R} \to f(x,t) \in \mathbb{R}$ est continue.

4. On va montrer que $F(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Cela revient à montrer que, pour toute suite (x_n) de réels telle que $x_n \to +\infty$, on a $F(x_n) \to 0$. Or ceci résulte du théorème de convergence dominée appliqué à la suite de fonctions définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n : t \in [0,+\infty[\to f(x_n,t) \in \mathbb{R}$. En effet :
   * la suite (f_n) converge simplement vers 0 quand $n \to \infty$; en effet, si $t \geq 0$, on a $(1+t^2) > 0$ donc $-x_n(1+t^2) \to -\infty$ quand $n \to \infty$ puis (comportement de la fonction exponentielle en $-\infty$) $e^{-x_n(1+t^2)} \to 0$;
   * la suite (f_n) est dominée par g, puisque $|f_n(t)| \leq g(t)$ pour tous $t \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $(1+t^2) \geq 0$ donc $x^2(1+t^2) \geq a^2(1+t^2)$ lorsque $x \geq a \geq 0$ (car alors $x^2 \geq a^2$). Il suit par croissance de la fonction exponentielle que $e^{a^2(1+t^2)} \leq e^{x^2(1+t^2)}$, soit $e^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-a^2(1+t^2)}$.

   (b) Nous allons appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale à la restriction $f :]a,b[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$. On a f de classe C^1, avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.
   * Pour tout $x \in]a,b[$, la fonction $t \to f(x,t) \in \mathbb{R}$ est intégrable (question 2)
   * Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \in]a,b[\to f(x,t) \in \mathbb{R}$ est de classe C^1 (f l'est)
   * Pour tout $x \in]a,b[$ et tout $t \in [0,+\infty[$, on a d'après 5.(a) $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq 2be^{-a^2}e^{-at^2}$, la fonction majorante étant intégrable sur $[0,+\infty[$ (cf. le rappel).

   Le théorème s'applique donc, montre que F est de classe C^1 sur l'intervalle $]a,b[$, et que la dérivée $F'(x)$ (pour $x \in]a,b[$) vaut $F'(x) = -2x \int_{[0,+\infty[} e^{-x^2(1+t^2)}\, d\lambda(t)$.

   (c) Le fait que F soit de classe C^1 est une propriété locale. Puisque F est de classe C^1 sur tout intervalle ouvert $]a,b[\subset]0,\infty[$ pour $0 < a < b < \infty$ (question b), il suit que F est de classe C^1 sur $]0,\infty[$.

   (d) Pour $x > 0$, l'homothétie $t \to tx$ préserve l'intervalle $[0,+\infty[$, et donc
   $J(x) = \int_{[0,+\infty[} e^{-x^2t^2} d\lambda(t) = (1/x) \int_{[0,+\infty[} e^{-t^2}\, d\lambda(t) = I/x$.

(e) On a vu en (5.b) que $F'(x) = -2x \int_{[0,+\infty[} e^{-x^2(1+t^2)}\, d\lambda(t) = -2xe^{-x^2} \int_{[0,+\infty[} e^{-x^2t^2}\, d\lambda(t)$. D'après (5.d) on a donc bien $F'(x) = -2\, e^{-x^2} I$.

(f) La fonction F, de classe C^1 sur $]0,\infty[$, y est primitive de sa dérivée. On a donc, pour tous $0 < \varepsilon < x$ (intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un segment égale à l'intégrale de Lebesgue)

$$F(x) - F(\varepsilon) = -2 \left(\int_\varepsilon^x e^{-t^2}\, dt \right) I = -2 \left(\int_{[\varepsilon,x]} e^{-t^2}\, d\lambda(t) \right) I\,.$$

On conclut en faisant tendre ε vers 0. En effet, si $\varepsilon \to 0$: F est continue sur $[0,+\infty[$ donc $F(\varepsilon) \to F(0)$, et $|\int_0^x e^{-t^2}\, dt - \int_\varepsilon^x e^{-t^2}\, dt| = |\int_0^\varepsilon e^{-t^2}\, dt| \leq \varepsilon \to 0$ puisque $0 \leq e^{-t^2} \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. Faisons tendre x vers $+\infty$ dans l'identité précédente. D'une part on a vu en (2) que $F(x) \to 0$, tandis que $F(0) = \pi/2$. Le théorème de convergence monotone, appliqué aux suites de fonctions positives définies par $u_n(t) = e^{-t^2} \mathbb{1}_{[0,x_n]}$ pour toute suite positive $x_n \to +\infty$, assure alors que $\int_{[0,+\infty[} e^{-t^2}\, d\lambda(t) = \lim_{x\to\infty} \int_{[0,x]} e^{-t^2}\, d\lambda(t)$. On a donc $F(0) = I^2$ puis $I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (l'intégrale I d'une fonction positive est positive).

Exercice 2 :

2. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_\mathcal{T}$ est positive. Puisqu'elle est nulle en dehors du carré $C = [0,\pi]^2 \subset \mathbb{R}^2$ et majorée par 1, la croissance de l'intégrale assure que $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_\mathcal{T} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_C d\lambda = \pi^2 < \infty$, donc cette fonction $\mathbb{1}_\mathcal{T}$ est bien intégrable.
3. La fonction définie par $(x,y) \to x\, \cos(x+y)\, \mathbb{1}_\mathcal{T}(x,y)$ est intégrable puisqu'on a la majoration $\int_{\mathbb{R}^2} |x\, \cos(x+y)\, \mathbb{1}_\mathcal{T}(x,y)|\, d\lambda(x,y) \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\pi\, \mathbb{1}_\mathcal{T}(x,y)|\, d\lambda(x,y) \leq \pi^3 < \infty$.
4. D'après la question précédente, l'intégrale $I = \int_\mathcal{T} x\, \cos(x+y)\, d\lambda(x,y)$ est bien définie et on peut utiliser le théorème de Fubini pour la calculer. Intégrons d'abord "en y" (il va s'agir d'intégrales de Riemann – on intègre des fonctions continues sur des segments) :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi x \left(\int_0^{\pi-x} \cos(x+y)\, dy \right) dx = \int_0^\pi x\, [\sin(x+y)]_0^{\pi-x}\, dx \\ &= -\int_0^\pi x\, \sin x\, dx = [x\, \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\, dx = -\pi\,, \end{aligned}$$

la fin du calcul provenant d'une intégration par parties.

Exercice 3 :

1. L'application $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to (ax, by) \in \mathbb{R}^2$ est linéaire inversible (car a et b non nuls), donc c'est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même (elle est de classe C^1 comme toute application linéaire, bijective, et sa réciproque est linéaire donc est également de classe C^1).
2. On a $\varphi(D) = \{(ax,by) \mid x^2 + y^2 < 1\} = \{(u = ax, v = by)\,,\ (u/a)^2 + (v/b)^2 < 1\} = \mathcal{E}$.
3. Voir le cours.
4. D'après les questions précédentes, l'application $\varphi : D \to \mathcal{E}$ est un C^1-difféomorphisme. En appliquant le théorème du changement de variables à la fonction (mesurable positive) $f_1 : D \to [0,+\infty[$ constante égale à 1 sur $\mathcal{E}$, on obtient : $\int_D f_1 \circ \varphi\, |J\varphi|\, d\lambda = \int_\mathcal{E} d\lambda$. Puisque le déterminant jacobien de φ est constant égal à ab, il vient $A(\mathcal{E}) = \int_\mathcal{E} d\lambda = ab\, A(\mathcal{D}) = \pi\, ab$.