Corrigé du Partiel du 8/11/19

Question de cours : On applique le théorème de convergence monotone à la suite de fonctions (mesurables) (f_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = f\,\mathbb{1}_{[-n,n]}$. Comme f est positive et que $[-n,n] \subset [-(n+1),n+1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (f_n) est une suite croissante de fonctions positives. De plus, elle converge simplement vers la fonction f (en effet, si $x \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [-N,N]$, ainsi, pour tout $n \geq N$, $f_n(x) = f(x)$ et $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$). Il suit que

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f\,d\lambda\,.$$

Exercice 1 : La primitive de f qui s'annule en 0 est bien définie puisque f continue. Notons la F. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t\,\cos t\,dt$. Une intégration par parties (avec les fonctions C^1, $u(t) = t$ et $v(t) = \sin t$) nous donne $F(x) = [t\,\sin t]_0^x - \int_0^x \sin t\,dt = x\,\sin x + \cos x - 1$.

Exercice 2 :

1. (a) Une fonction (mesurable) positive g est intégrable lorsque $\int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda < +\infty$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 + n^2t^2 \geq 1$ pour tout $t \geq 0$. Puisque les fonctions $t \to \sqrt{t}$ et $t \to 1/t$ sont respectivement croissante et décroissante sur $[0,+\infty[$, il suit que $0 \leq f_n(t) \leq n\,e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$. La fonction $t \to e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ comme fonction de référence. Il suit par comparaison des fonctions positives f_n et $t \to ne^{-t}$ que f_n est également intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. Fixons $t = 0$: $f_n(0) = n$ pour tout n et donc $f_n(0)$ converge vers ∞ lorsque n tend vers ∞. Lorsque $t > 0$, et $n \geq 1$, on obtient en factorisant par n^2 sous la racine que $f_n(t) = \frac{ne^{-t}}{n\sqrt{n^{-2}+t^2}} = \frac{e^{-t}}{\sqrt{n^{-2}+t^2}}$. Donc pour $t > 0$ fixé, $f_n(t)$ converge vers $\frac{e^{-t}}{t}$ lorsque n tend vers ∞.

   La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty]$ définie par $f(0) = +\infty$ et $f(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ pour tout $t > 0$.

3. On commence par remarquer que $f_0 = 0$ alors que f_1 est positive.

   Pour $n \geq 1$ et $t \in [0,+\infty[$, la suite $(t^2 + n^{-2})_{n\geq 1}$ est décroissante. Donc la suite $\left((t^2+n^{-2})^{-1/2}\right)_{n\geq 1}$ est croissante (car $t \to t^{-1/2}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$). Par conservation du sens des inégalités par multiplication par un réel positif, on en déduit que la suite de réels $(f_n(t))_{n\geq 1}$ est croissante.

   La suite de fonctions (f_n) est donc croissante.

4. (a) $\int_{]0,1]} \frac{1}{t}\,d\lambda(t) = +\infty$ (fonction de référence de non-intégrabilité près de 0).

   (b) On a $e^{-t} \geq e^{-1}$ pour tout $0 \leq t \leq 1$ (car $s \to e^s$ est croissante) donc, par croissance de l'intégrale des fonctions positives, $\int_{]0,1]} \frac{e^{-t}}{t}\,d\lambda(t) \geq e^{-1}\int_{]0,1]} \frac{1}{t}\,d\lambda(t) = +\infty$.

   (c) De nouveau par croissance de l'intégrale des fonctions positives, on obtient que $\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t}}{t}\,d\lambda(t) \geq \int_{]0,1]} \frac{e^{-t}}{t}\,d\lambda(t) = +\infty$.

On peut aussi invoquer la relation de Chasles pour conclure. On dit alors que, par positivité de l'intégrale des fonctions positives :

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t}}{t}\, d\lambda(t) = \int_{]0,1]} \frac{e^{-t}}{t}\, d\lambda(t) + \int_{]1,+\infty[} \frac{e^{-t}}{t}\, d\lambda(t) \geq \int_{]0,1]} \frac{e^{-t}}{t}\, d\lambda(t) = +\infty\,.$$

5. Le théorème de convergence monotone s'applique à la suite de fonctions (f_n), qui est une suite croissante de fonctions (mesurables) positives qui converge simplement vers f sur $[0,+\infty[$. Il suit que la limite de $I_n = \int_{[0,+\infty[} f_n(t)\, d\lambda(t)$ quand n tend vers ∞ existe et vaut $\int_{[0,+\infty[} f(t)\, d\lambda(t) = +\infty$.
(Noter que les intégrales de f (ou des f_n) sur $[0,+\infty[$ ou bien sur $]0,\infty[$ sont égales.)

Exercice 3 :

1. (a) *Question de cours.* La fonction $g_\alpha : t \in [1,+\infty[\to t^\alpha \in [0,+\infty]$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.
   (b) L'indication est immédiate à vérifier.
   On en déduit la minoration $\frac{t}{(1+t)^n} \geq \frac{t}{(2t)^n}$ pour tout $t \geq 1$ (par croissance et décroissance respectives des fonctions $s \to s^n$ et $s \to \frac{1}{s}$ sur $[0,\infty[$). Par croissance de l'intégrale des fonctions positives, et en utilisant la question précédente, il vient pour $n = 1$ ou $n = 2$ que $\int_{[1,+\infty[} \frac{t}{(1+t)^n}\, d\lambda(t) \geq \int_{[1,+\infty[} 2^{-n} t^{1-n}\, d\lambda(t) = +\infty$, donc $J_1 = J_2 = +\infty$.
   De même, on déduit de l'indication la majoration $\frac{t}{(1+t)^n} \leq t^{1-n}$, valable pour tout $t \geq 1$. Toujours par croissance de l'intégrale des fonctions positives, il suit que $\int_{[1,+\infty[} \frac{t}{(1+t)^n}\, d\lambda(t) \leq \int_{[1,+\infty[} t^{1-n}\, d\lambda(t) < +\infty$ lorsque $n \geq 3$.
2. (a) En factorisant par u^3, on obtient que $s_3(u) = \sum_{n=3}^\infty u^n = u^3 \sum_{n=0}^\infty u^n = \frac{u^3}{1-u}$.
   (b) Soit $t > 0$. En posant $u = (1+t)^{-1}$, on a bien $0 < u < 1$ et l'identité précédente nous donne alors

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(1+t)^n} = (1+t)^{-3} \frac{1}{1-(1+t)^{-1}} = \frac{1}{t(1+t)^2}\,.$$

3. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \to (1+t)^{-2}$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[1,p]$, elle y est donc réglée. Comme elle admet $t \to -(1+t)^{-1}$ comme primitive sur $[0,+\infty[$, $K_p = \int_{[1,p]} \frac{1}{(1+t)^2}\, d\lambda(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}$.
   (b) Le théorème de convergence monotone, appliqué à la suite croissante de fonctions (mesurables) positives définies sur $[1,+\infty[$ par $g_p(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \mathbb{1}_{[1,p]}(t)$ donne $K = \lim_{p\to\infty} K_p = \frac{1}{2}$.
4. Nous appliquons cette fois-ci le corollaire du théorème de convergence monotone pour les séries de fonctions (mesurables) positives à la série $\sum_{n=3}^\infty h_n$, où $h_n : \mathbb{R} \to [0+\infty[$ est définie par $h_n(t) = \frac{t}{(1+t)^n}$ pour tout $t \geq 1$.
D'après 2b, on a l'égalité $\sum_{n\geq 3} h_n(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$. Donc, en utilisant le résultat de 3b,

$$\sum_{n\geq 3} J_n = \sum_{n\geq 3} \int_{[1,+\infty[} h_n(t)\, d\lambda(t) = \int_{[1,+\infty[} \left(\sum_{n\geq 3} h_n(t) \right) d\lambda(t) = \int_{[1,+\infty[} \frac{1}{(1+t)^2} = 1/2\,.$$