Partiel du 8/11/19 – Durée 2 heures

Documents (y compris électroniques) interdits.
Calculatrices, objects connectés et téléphones éteints et rangés dans des sacs fermés.

Soigner la rédaction. Enoncer précisément les théorèmes utilisés, et vérifier soigneusement que les hypothèses sont satisfaites.
On peut admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

Question de cours :

Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Justifier l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f \, d\lambda \,.$$

Exercice 1 : Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $f(t) = t \cos t$.

Exercice 2 :

On considère la suite de fonctions positives $f_n : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définies pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, +\infty[$ par

$$f_n(t) = \frac{ne^{-t}}{\sqrt{1 + n^2t^2}} \,.$$

On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n \in [0, +\infty]$ définie par

$$I_n = \int_{[0,+\infty[} f_n \, d\lambda \,.$$

1. (a) Rappeler la définition d'une fonction $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ intégrable.
   (b) Démontrer que f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On remarquera que $1 + n^2t^2 \geq 1$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty]$ que l'on déterminera.
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
   On pourra remarquer que, pour tout $t \geq 0$, la suite réelle $(t^2 + \frac{1}{n^2})_{n\geq1}$ est décroissante.
4. (a) Rappeler la valeur de $\int_{]0,1]} \frac{1}{t} \, d\lambda(t)$.
   On ne demande pas de justification.
   (b) En déduire la valeur de $\int_{]0,1]} \frac{e^{-t}}{t} \, d\lambda(t)$.
   Cette question ne nécessite pas de calculs.
   (c) Déterminer $\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t}}{t} \, d\lambda(t)$.
5. Montrer que la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\alpha \in [0, +\infty]$ que l'on déterminera.

Exercice 3 :

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_n \in [0, +\infty]$ définie par

$$J_n = \int_{[1,+\infty[} \frac{t}{(1+t)^n} \, d\lambda(t) \, .$$

1. (a) *Question de cours.* Rappeler à quelle condition, portant sur le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $g_\alpha : t \in [1, +\infty[\to t^\alpha \in [0, +\infty[$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
   On ne demande pas de justification.

   (b) Montrer que $J_1 = J_2 = +\infty$, et que $J_n < +\infty$ lorsque $n \geq 3$.
   On pourra remarquer que $t \leq 1 + t \leq 2t$ pour tout $t \geq 1$.

2. Soit $0 < u < 1$. On rappelle l'identité $\sum_{n=0}^{\infty} u^n = \dfrac{1}{1-u}$.

   (a) Déterminer, en fonction de $u \in]0, 1[$, la valeur de $s_3(u) = \sum_{n=3}^{\infty} u^n$.

   (b) Montrer alors, pour tout $t \geq 1$, l'égalité

   $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(1+t)^n} = \frac{1}{t(1+t)^2} \, .$$

3. (a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de

   $$K_p = \int_{[1,p]} \frac{1}{(1+t)^2} \, d\lambda(t) \, .$$

   (b) En déduire la valeur de

   $$K = \int_{[1,+\infty[} \frac{1}{(1+t)^2} \, d\lambda(t) \, .$$

4. En déduire alors la valeur de $\sum_{n=3}^{\infty} J_n$.

5. *Question hors barème.*

   Soit $0 < u < 1$. Démontrer l'identité $\sum_{n=0}^{\infty} u^n = \dfrac{1}{1-u}$ admise ci-dessus.