Contrôle Continu 2 : corrigé

Questions de cours

1. Énoncer le théorème de convergence dominée (4.25).
2. Montrer que si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont mesurables, f est intégrable et $g = f$ presque partout, alors g est intégrable et son intégrale est celle de f (sachant que l'intégrale d'une fonction mesurable sur une partie négligeable est nulle).

Exercice (On rappelle que $|\sin t| \leq t$ lorsque $t > 0$.)

1. Vérifier que la fonction $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(t) = \dfrac{(\sin t)\ e^{-t}}{t^{3/2}}$ est intégrable.
2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_{[n,n+1]} \frac{(\sin t)\ e^{-t}}{t^{3/2}}\, d\lambda(t)$ lorsque $n \to +\infty$? Justifier.

Questions de cours

1. cf polycopié
2. Voilà la preuve du cours : Soit N l'ensemble négligeable des $x \in \mathbb{R}$ où $f(x) \neq g(x)$. On a

$$|g| = |g|1_{\mathbb{R}\setminus N} + |g|1_N = |f|1_{\mathbb{R}\setminus N} + |g|1_N \leq |f| + |g|1_N$$

qui est la somme de deux fonctions intégrables, donc g est intégrable. Dans ce cas,

$$\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}\setminus N} g\, d\lambda + \int_N g\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}\setminus N} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$$

car $\int_N g\, d\lambda = 0 = \int_N f\, d\lambda$.

Exercice

1. La fonction est continue sur son domaine de définition, donc mesurable. Pour l'intégrabilité, on peut étudier f sur les deux intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ séparément. Par comparaison, il suffit de majorer $|f|$ par une fonction intégrable dans chaque cas. Pour $t \geq 1$, $|f(t)| \leq e^{-t}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ (fonction de référence). Pour $t \leq 1$, $|f(t)| \leq \dfrac{e^{-t}}{t^{1/2}} \leq \dfrac{1}{t^{1/2}}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ (fonction de réference).
2. Posons $f_n(t) = 1_{[n,n+1]}(t)f(t)$ pour $n \geq 1$ et $t > 0$. On a la domination $|f_n| \leq |f|$ pour tout n et si $t > 0$ est fixé, pour tout $n > E(t) + 1$, on $f_n(t) = 0$ donc la suite (f_n) converge simplement vers 0. Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{[n,n+1]} \frac{(\sin t)\ e^{-t}}{t^{3/2}}\, d\lambda(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\, d\lambda(t) = 0$.