Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2023–2024**

Partiel: 24/10/2023

Durée 2 heures.
Soigner la rédaction et la présentation.
Les documents, y compris sous forme électronique, ne sont pas autorisés.
Les calculatrices, tablettes, ordinateurs, montres connectées, sont interdits. Les téléphones portables, éteints et rangés.

Questions de cours

1. Écrire la définition d'une fonction Lebesgue intégrable f définie sur une partie mesurable B de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, puis à valeurs dans $\mathbb{R}$, et enfin à valeurs dans $\mathbb{C}$, et donner la définition de son intégrale dans les deux derniers cas.
2. Enoncer le corollaire 2.12 du polycopié et le démontrer (approximation de l'intégrale d'une fonction mesurable positive sur $]a, b[$.)

Exercice 1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$ $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall 0 \leqslant x \leqslant 1,\ f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n.$$

1. Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, étudier les variations de f_n et calculer $||f_n||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.
3. Montrer que $||f_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e}$.
4. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$?

Exercice 2.

1. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ données par $g_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction que vous devez spécifier et étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $a > 0$. Comme dans la question précédente, étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$.
   (c) Soient $0 < a < b < \infty$ et $I_n = \displaystyle\int_a^b g_n(x)dx$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions $h_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ données par

$$h_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in]1/n, 1] \end{cases}.$$

   (a) Étudier la limite simple de la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 h_n(x)dx$.
   (c) En utilisant les résultats des questions (a) et (b), y-a-t-il convergence uniforme de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$?

Exercice 3.

1. Démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} x e^{-nx}.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $v_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $v_n(x) = xe^{-nx}$. Montrer que

$$\int_{]0,+\infty[} v_n(x) d\lambda(x) = \frac{1}{n^2}.$$

3. Montrer que la fonction

$$u : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

   est intégrable sur $]0,+\infty[$.

4. Démontrer que

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{x}{e^x - 1} d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. (Bonus). Montrer de la même façon que pour tous $a, b > 0$, on a

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}} d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}.$$