Corrigé Exercices partiel

October 19, 2023

Exercice 1.

1. Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Pour $x \in]0, 1]$, $(1 - x)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par croissance comparée, $n^\alpha(1 - x)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Ainsi $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Donc la suite de fonctions converge simplement vers la fonction nulle.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 donc pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n^\alpha(1 - x)^n - n^\alpha xn(1 - x)^{n-1} \\ &= n^\alpha(1 - x)^{n-1}\Big[1 - (n + 1)x\Big]. \end{aligned}$$

   Ainsi, sur $[0, \frac{1}{n+1}]$, f_n est croissante et sur $[\frac{1}{n+1}, 1]$, f_n est décroissante. De plus, f_n est positive et donc $|f_n| = f_n$. Elle admet donc un maximum en $x_0 = \frac{1}{n+1}$:
   Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &= f_n(\frac{1}{n+1}) \\ &= n^\alpha \frac{1}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n. \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})}$$

   Puisque $\ln(1 - \frac{1}{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n+1}$, on a $n\ln(1 - \frac{1}{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$.
   Ainsi:

$$\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1},$$

   et donc:

$$||f_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

4. Il y a convergence uniforme vers la fonction nulle si, et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 2.

1. (a) Si $x = 0$, alors $g_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $x \neq 0$, comme $1 + x^2 > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n} = 0.$$

   Donc la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $g = 1_{\{0\}}$. Dans ce cas, la convergence n'est pas uniforme parce que chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ mais la fonction g ne l'est pas au point $x = 0$.

(b) Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$ nous avons que

$$x \geq a \;\Rightarrow\; 0 < \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}.$$

Donc,

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |g_n(x)| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n},$$

qui tend vers zéro quand $n \to +\infty$. D'où la convergence simple et uniforme vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

(c) Comme $[a, b] \subset [a, +\infty[$, la suite de fonctions continues $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur le segment $[a, b]$, et on peut donc permuter limite et intégrale en utilisant le théorème d'échange de limite et intégrale de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)dx = 0.$$

2. (a) Si $x = 0$, $h_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si $0 < x \leq 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$ nous avons que $\frac{1}{n} < x$ et par conséquent $h_n(x) = 0$. Donc, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle.

(b) En utilisant un changement de variables, posons $\psi : [0, 1/n] \to [0, 1]$ la fonction telle que $\psi(x) = nx$. On a bien que ψ est de classe C^1 et $\psi(0) = 0$, $\psi(1/n) = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 h_n(x)dx &= \int_0^{1/n} n^2x(1-nx)dx \\ &= \int_0^1 u(1-u)du = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(c) Nous avons montré dans la question (a) que sur $[0, 1]$ la suite de fonctions continues $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle. Dans ce cas on ne peut pas avoir la convergence uniforme de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sinon par le théorème d'échange de limite et intégrale de Riemann on aurait

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)dx = 0,$$

ce que contredit le résultat de la question (b).

Exercice 3.

1. Soit $x \in]0, +\infty[$. On a

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = xe^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_{n,k} = v_n 1_{]0,k]}$. La suite $(v_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge de façon croissante vers v_n. D'après le théorème de convergence monotone, on a donc

$$\int_{]0,+\infty[} v_n(x)d\lambda(x) = \lim_{k\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} v_{n,k}(x)d\lambda(x).$$

On calcule en utilisant une intégration par parties (cf Proposition 3.18 du cours):

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[} v_{n,k}(x)d\lambda(x) &= \int_{]0,k]} v_n(x)d\lambda(x) = \int_{]0,k]} x\left(\frac{e^{-nx}}{-n}\right)' d\lambda(x) = \left[x\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^k + \int_{]0,k]} \frac{e^{-nx}}{n} d\lambda(x) \\ &= -\frac{k}{n}e^{-nk} + \left[\frac{e^{-nx}}{-n^2}\right]_0^k = -\frac{k}{n}e^{-nk} - \frac{e^{-nk}}{n^2} + \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes tendent vers 0 quand $k \to +\infty$. On a donc

$$\int_{]0,+\infty[} v_n(x) d\lambda(x) = \frac{1}{n^2}.$$

3. La fonction $u : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, elle se prolonge par continuité en 0 (car $e^x - 1 \sim x$ en 0) et au voisinage de l'infini elle est équivalente à xe^{-x} qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ (elle est négligeable devant x^2 par exemple). Cette fonction est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

4. On a

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{x}{e^x - 1} d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} xe^{-nx} \right) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} xe^{-nx} d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

en utilisant d'abord la question 1, puis le corollaire 2.14 du cours, et enfin la question 2.

5. On observe d'abord que la fonction

$$x \mapsto \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$ (même argument qu'à la question 3). On écrit pour $x > 0$

$$\frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}} = xe^{-ax} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nbx} = \sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-ax-nbx}. \tag{1}$$

Posons $h_n(x) = xe^{-ax-nbx}$. On vérifie comme à la question 2 que

$$\int_{]0,+\infty[} h_n(x) d\lambda(x) = \frac{1}{(a + bn)^2}. \tag{2}$$

On a donc

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{xe^{-ax}}{1 - e^{-bx}} d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-ax-nbx} \right) d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} xe^{-ax-nbx} d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + bn)^2}.$$

en utilisant (1), puis le corollaire 2.14 du cours, et enfin (2).