Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2023–2024**

Corrigé Contrôle Continu 1

Durée 15mn.
Soigner la rédaction et la présentation.
Ecrivez directement sur le recto et verso de cette page.
Pas d'autre document ne sera ramassé.
Les documents, y compris sous forme électronique, ne sont pas autorisés.
Les calculatrices, tablettes, ordinateurs sont interdits, les téléphones portables, éteints et rangés.

Questions de cours

1. Écrire la définition de majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ et le théorème de la borne supérieure (proposition 1.9).
2. Enoncer et démontrer le Corollaire 2.14 sur l'intégration (sur $\mathbb{R}$) d'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ de fonctions positives mesurables $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$.

1. Calculer $\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| \,;\, x \in \mathbb{R}\}$ en justifiant le calcul.
2. Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$.
3. Soit $F_n(y) = \int_0^y f_n(x)\,dx$ pour $y \geq 0$ et $n \geq 1$. Exprimer $F_n(y)$ en fonction de n et y à l'aide d'une fonction connue. La suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty)$?

Au sujet du cours

Un énoncé doit clairement montrer les hypothèses et la conclusion (n'hésitez pas à faire des listes pour les hypothèses/les conclusions s'il y en a plusieurs). Une bonne liste est parfois plus juste qu'une mauvaise phrase ! Une preuve doit faire les enchaînements de façon logique en montrant comment et au bon moment sont utilisées les hypohèses et les résultats du cours.

1) Ecrire "Si M est un majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ alors pour tout $a \in A$, $a \leq M$" n'est pas une définition. L'énoncé du cours est "si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$, (on dit que) M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leq M$." (Remarque, l'énoncé ne suppose rien d'autre : pas besoin de non-vide ou majorée).

La proposition 1.9 est explicitement dans le cours : Si A est **non-vide et majorée**, alors elle **admet** une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, notée $\sup A$ (et elle est unique). L'existence est le point fondamental. Cela suffisait. La proposition 1.11 dit autre chose : elle caractérise la borne supérieure et permet de la déterminer concrètement : j'ai mis néanmoins la moitié des points (lorsque c'est correct).

2) Le corollaire 2.14 est explicite dans le cours. J'ai sanctionné quand il est écrit dans la preuve les fonctions f_p (les sommes partielles) sont mesurables, positives et croissante(s) : les **fonctions** f_p sont mesurables et positives et la **suite** $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Correction de l'exercice

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq 1 + nx^2 < +\infty$, donc $0 < f_n(x) \leq 1$ et il vient $|f_n(x)| \leq 1$. Donc $\|f_n\|_\infty \leq 1$. Comme $f_n(0) = 1$, la borne supérieure est atteinte et donc $\|f_n\|_\infty = 1$.
2. Pour $x = 0$, $f_n(0) = 1$ pour tout n, donc $f_n(0) = 1$ converge vers 1. Pour $x \neq 0$, la suite $(1 + nx^2)_{n\geq 1}$ converge vers $+\infty$. Donc $f_n(x) \to 0$ si $n \to +\infty$. On a bien une limite simple (sur $\mathbb{R}$) qui est la fonction indicatrice de $\{0\}$, $1_{\{0\}}$.

   Comme cette fonction n'est pas continue en 0, il ne peut y avoir de convergence uniforme des fonctions f_n qui, elles, sont continues en 0.
3. On effectue le changement de variable de classe C^1, $z = \varphi(x) = \sqrt{n}\,x$ de $[0, y]$ sur $[0, \sqrt{n}\,y]$, qui donne (on connaît la primitive $\frac{1}{1+z^2}$ qui s'annule en 0 !)

   $$F_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}\,y} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan(\sqrt{n}\,y).$$

   Comme la fonction arctan est bornée sur $\mathbb{R}$ par $\pi/2$ (en fait, $\|\arctan\|_\infty = \pi/2$: l'égalité n'était pas nécessaire ici, mais pourquoi est-elle vraie ?), on a $\sup_{x\in[0,+\infty)} |F_n(x)| \leq \pi/(2\sqrt{n})$ (cela ne dépend plus de x) et donc la suite (F_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty)$.

Commentaires

Évidemment, 15 minutes, c'est court, mais c'est une bonne façon de tester vos réflexes "élémentaires" et connaissances, et de voir comment progresser pour la suite : c'est l'objectif du CC, qui compte très peu dans la note finale. Certains réussissent très bien le cours et ne font rien de correct pour l'exercice : Il faut (ré)apprendre à calculer.

1) Beaucoup oublient de dire que $f_n(x) \geq 0$ et donc quand on passe aux valeurs absolues, il manque quelque chose (exemple : la fonction $f : x \mapsto -2$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(x) \leq 1$ pour tout x mais $\|f\|_\infty = 2$!). Ceux qui font l'étude de la fonction doivent préciser les limites aux bornes pour donner les bons encadrements. Il y a des fois une confusion entre la variable x et l'indice n : certains font l'étude de $f_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$ pour en déduire $\|f_n\|_\infty$: cela n'a rien à voir puisqu'on prend le sup pour $x \in \mathbb{R}$ avec n fixé.

2) là, quand on écrit $f_n(x) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, c'est INJUSTIFIÉ si on ne dit pas pour quels x. Et ici, c'est faux car pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 1$. Au niveau licence 3, on ne peut plus tolérer un tel manque de rigueur. Il faut faire l'effort d'utiliser les bons symboles et les notations cohérentes : j'ai trop lu la fonction $f_n(x)$ converge vers f. Se décider (c'est aussi s'aider à progresser) : on écrit soit la suite (f_n) converge simplement vers f, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ (c'est un nombre réel) converge vers $f(x)$ si $n \to +\infty$. L'un ou l'autre (les deux sont inutiles : c'est la même chose par la définition de la convergence simple).

3) Peu de bonnes réponses. Le principe du changement de variables est à revoir pour beaucoup.