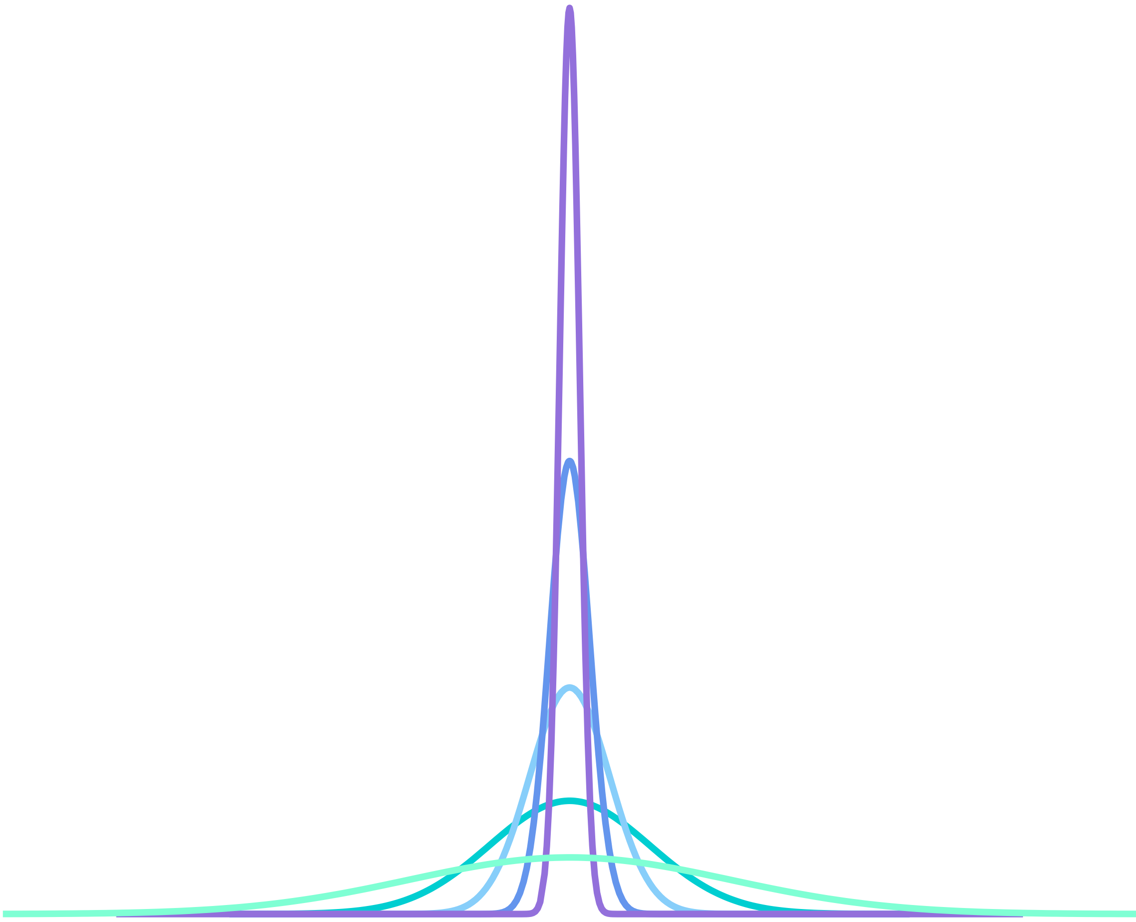
Intégration



MDD 302

Licence Double Diplôme (LDD3)

Université Paris-Saclay

D. Hulin 2022-23

Table des matières

Bibliographie succinte

Les textes suivants vont largement au-delà de ce polycopié. Ce sont néanmoins d'excellentes références pour la théorie de l'intégration, la transformation (et les séries) de Fourier (ainsi que les probabilités).

Faraut Calcul intégral

Briane, Pages Théorie de l'intégration

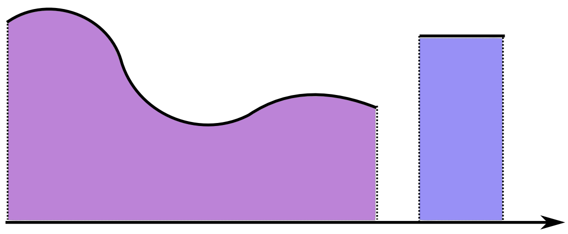
Le Gall Intégration, probabilités et processus aléatoires, partie I
Polycopié disponible à l'adresse
`https://www.math.u-psud.fr/~jflegall/IPPA2.pdf`

Peyrière Convolution, séries et intégrales de Fourier

Rudin Analyse réelle et complexe

Introduction

La notion d'intégrale est intimement liée aux notions d'aire et de longueur.
Pour une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ positive définie sur un intervalle borné, l'intégrale de f sur ce segment doit représenter l'aire (ou la surface) de la portion du plan comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de f (zone grisée sur le dessin).



Notamment, si la fonction f est constante et égale à $c \geq 0$ sur l'intervalle $[a, b]$ et nulle en dehors de cet intervalle, son intégrale doit être égale à l'aire d'un rectangle de côtés $b - a$ et c, soit $\int f = c\,(b - a)$.

Dans ce cours nous allons présenter la “théorie de l'intégration de Lebesgue".

Qu'est-ce qu'une théorie de l'intégration ? C'est un procédé qui, à toute fonction “raisonnable", en particulier assez “régulière" en un sens à préciser, $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble X associera son intégrale $I(f) = \int_X f$. Dans ce cours, nous travaillerons dans un premier temps sur $X = \mathbb{R}$ puis nous généraliserons par la suite à $X = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, pour la mesure de Lebesgue.

Revenons à la notion d'intégrale que nous cherchons à définir. On lui demandera de satisfaire les propriétés de bon goût suivantes :

1. I est linéaire : pour toutes fonctions $f, g : X \to \mathbb{R}$ “raisonnables” et tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_X (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_X f + \beta \int_X g$$

2. I est positive, et donc croissante : pour $f, g : X \to \mathbb{R}$ “raisonnables” :

$$\text{si } f \geq 0 \text{ on a } \textstyle\int_X f \geq 0 \ \dots$$
$$\text{et donc si } f \geq g, \text{ on a } \textstyle\int_X f \geq \int_X g.$$

On souhaiterait de plus que l'affirmation suivante :

3. si la suite (f_n) converge vers f, alors la suite des intégrales $I(f_n)$ converge vers $I(f)$

soit vraie sous des hypothèses (portant sur la suite (f_n) et sur la notion de convergence $f_n \to f$) les plus générales possible.

Vous avez déjà défini l'intégrale de Riemann. L'intégrale de Riemann permet notamment d'intégrer une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie sur un segment, et elle satisfait les propriétés 1. et 2. ci-dessus. Malheureusement, l'intégrale de Riemann n'est pas satisfaisante en ce qui concerne la condition 3. Par exemple, la fonction $h := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann. Cette fonction n'a pourtant rien d'effrayant : elle est bornée, et peut s'obtenir comme limite croissante d'une suite de fonctions f_n en escaliers (valant chacune 0 partout sauf en un nombre fini de rationnels, et donc d'intégrales nulles). On aimerait donc bien que h soit intégrable, et d'intégrale nulle !

Cette constatation nous amène à introduire l'intégrale de Lebesgue, qui est une extension de l'intégrale de Riemann au sens où une fonction Riemann intégrable est également intégrable au sens de Lebesgue, et les intégrales de Riemann et de Lebesgue de cette fonction coïncident (voir le corollaire 3.15).

Ce qu'on y gagne, c'est que l'intégrale de Lebesgue se comporte particulièrement bien en ce qui concerne les propriétés de convergence : les théorèmes de convergence monotone 2.4 et de convergence dominée 4.25 sont, dans la pratique, très faciles à utiliser. Bien sûr il reste des hypothèses à vérifier mais, sans elles, la convergence des intégrales peut être en défaut ! Le prix à payer est que la construction de l'intégrale de Lebesgue est plus délicate ; elle sera donc reportée à la fin du cours.

La construction que nous proposons de l'intégrale de Lebesgue, et qui est la plus classique, repose sur la théorie de la mesure. Une fois bien comprises la construction et les propriétés de l'intégrale de Lebesgue, il est aisé de les généraliser à des espaces mesurés (X, m) plus généraux que les espaces $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ munis de leur mesure de Lebesgue, auxquels nous nous restreindrons dans ce cours. Ce cadre plus général sera notamment incontournable en théorie des Probabilités.

Nous conclurons ce cours en introduisant la transformée de Fourier, qui constitue un précieux outil pour l'étude d'équations aux dérivées partielles.

Plus prosaïquement, la transformée de Fourier nous fournira l'occasion mettre en situation les théorèmes majeurs de la théorie de Lebesgue. Nous l'illustrerons par l'étude élémentaire de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$.

Enfin, vous trouverez en Appendice une introduction aux espaces de Hilbert et aux séries de Fourier.

Comment travailler ce cours ?

En tête de chaque chapitre, on a indiqué :

• les définitions que vous devez connaître,
• les résultats que vous devez savoir énoncer, et appliquer correctement sur des exemples simples,
• les démonstrations que vous devez pouvoir restituer.

Lorsqu'une démonstration doit être connue, cela sera indiqué explicitement.

Ces résultats pourront être utilisés, sans être redémontrés, lors des examens. Il faudra alors les énoncer clairement, puis vérifier soigneusement que les hypothèses sont bien satisfaites dans votre situation.

Les démonstrations qui auront été faites en cours mais que l'on ne vous demande pas de savoir restituer doivent néanmoins être travaillées et bien comprises.

Comme tout texte mathématique, ce polycopié ne doit pas être lu de façon passive, mais crayon à la main. Il faut d'abord comprendre l'organisation générale des idées (en première lecture), puis passer aux détails.

En particulier, certains éléments de preuve très élémentaires ont délibérément été laissés au lecteur (c'est signalé dans le texte). Vous devez vous astreindre à les rédiger. Cela vous permet de vérifier que vous comprenez bien ce dont il s'agit, et que vous êtes capables d'écrire la preuve dans ses moindres détails.

L'objectif est de savoir traiter des exemples, en justifiant soigneusement la méthode suivie. Il est donc essentiel de réfléchir par soi-même aux exercices proposés dans les feuilles de TD, si possible avant la séance de travaux dirigés.

La meilleure façon de comprendre un théorème (ou de réaliser qu'on ne le maîtrise pas encore...), c'est de chercher à l'appliquer sur un exemple concret !

Certains paragraphes apparaissent sur fond gris.
Ce sont des remarques ou compléments qui ne sont pas au programme.

1. Rappels

On commence par des rappels concernant le corps des réels, la notion de densité, la dénombrabilité, la continuité d'une fonction, ainsi que la convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions. Toutes ces notions doivent être parfaitement maîtrisées, car elles seront utilisées de façon cruciale dans ce cours.

Vous êtes invités à reprendre votre cours et à refaire les exercices de l'année dernière si le besoin s'en fait sentir.

— La définition 1.9 de la borne supérieure.
— La notion de compacité 1.18.
— Les propositions 1.5 et 1.7 : propriétés de $\mathbb{R}$.
— Les notions de convergence simple et uniforme (1.26 et 1.34).
— La proposition 1.30 et sa preuve.
— La notion de continuité 1.42, le critère séquentiel de continuité 1.43 et la proposition 1.44 avec sa démonstration.
— Les corollaires 1.48 et 1.49, et leurs démonstrations.
— La notion de densité et la proposition 1.5.
— La notion de dénombrabilité, et les exemples.

Les notions de suite de Cauchy et de complétude seront introduites plus tard dans le cours (chapitre 8). Vous pouvez donc omettre la lecture du paragraphe A.5 (et a fortiori de A.6) pour l'instant, et vous y référer ultérieurement. Il n'en reste pas moins que la complétude de $\mathbb{R}$ est l'une de ses propriétés fondamentales !

A Le corps des réels

A.1 Rappels de topologie

Commençons par rappeler quelques notions de topologie dans un espace métrique.

Définition 1.1 Suite convergente. *Soient (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit que cette suite est convergente s'il existe un point $\ell \in X$ tel que $d(x_n, \ell) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ (la distance du point x_n à ℓ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$).*

Dans ce cas, le point $\ell \in X$ est unique : c'est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.2 La convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ s'exprime comme suit :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\varepsilon)$ tel que $d(x_n, \ell) < \varepsilon$ dès que $n \geq N$.

L'unicité de la limite est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire $d(\ell, \ell') \leq d(\ell, x_n) + d(x_n, \ell')$.

Définition 1.3 Partie dense. *Soit (X, d) un espace métrique. Soit $A \subset X$ une partie de X. On dit que A est dense dans X si, pour tout $x \in X$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x, i.e. $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.*

La partie A est donc dense dans X si tout élément de X est limite d'une suite d'éléments de A. Si vous n'êtes pas trop familier avec les espaces métriques abstraits, vous pouvez vous contenter de penser dans la définition précédente que $X = \mathbb{R}$, ou bien une partie $X \subset \mathbb{R}$, ou encore que $X = \mathbb{R}^n$.

A.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, bien sympathique, présente néanmoins quelques lacunes. Par exemple, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$... mais elle y admet cependant des solutions approchées. On s'empresse donc de plonger $\mathbb{Q}$ dans un corps plus gros, le corps $\mathbb{R}$ des réels.

Nous n'évoquerons pas ici de construction de $\mathbb{R}$. Rappelons qu'il s'agit d'un corps muni d'une relation d'ordre total, et de la topologie associée. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ résultera immédiatement de la construction. Voir également le paragraphe grisé ci-dessous.

Lemme 1.4 Densité dans $\mathbb{R}$. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. La partie A est dense dans $\mathbb{R}$ (i.e. tout réel est limite d'une suite d'éléments de A)*

1. *si et seulement si A rencontre tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point*
2. *si et seulement si A rencontre tout intervalle ouvert non vide.*

Preuve Observons que tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point contient un intervalle ouvert non vide. Les conditions 1 et 2 sont donc équivalentes.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie dense. Soit I un intervalle ouvert non vide. On choisit $x \in I$, puis un réel $\varepsilon > 0$ de sorte que $J =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A convergeant vers x. Pour n assez grand (mettons $n \geq N$) on aura $|x - a_n| < \varepsilon$, et donc $a_n \in J \cap A \subset I \cap A$.

Supposons réciproquement que A rencontre tout intervalle ouvert non vide. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut donc choisir un point $a_n \in]x - 1/n, x + 1/n[\cap A$. Par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. □

Proposition 1.5 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 1.6 Montrer qu'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) est dense dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle rencontre toute boule ouverte.

Déduire de la proposition 1.5 que $\mathbb{Q}^n$ (ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont rationnelles) est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ que vous devrez retenir sont les suivantes.

Proposition 1.7 *Le corps $\mathbb{R}$ des réels satisfait les propriétés suivantes.*

1. **Borne supérieure.** *Toute partie non vide majorée $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*
2. **Bolzano-Weierstrass.** *De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.*
3. **Complétude.** *Toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente.*

Ces propriétés découlent de la construction de $\mathbb{R}$ à partir des rationnels.

Lorsque, partant de $\mathbb{Q}$, on construit $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind, il suit «par construction»que $\mathbb{R}$ satisfait la propriété de la borne supérieure. Les autres propriétés s'en déduisent.

Lorsque $\mathbb{R}$ est construit à partir des suites de Cauchy de rationnels, on obtient “par construction” le fait que $\mathbb{R}$ est complet. Les autres propriétés suivent.

Pour quelques démonstrations vous pouvez, si vous le souhaitez, vous reporter au paragraphe A.6.

Notre propos n'étant pas de construire le corps des réels, nous nous contenterons ci-dessous de revenir sur les notions intervenant dans l'énoncé de la proposition 1.7.

A.3 Majorant, borne supérieure

Définition 1.8 Majorant. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie. On dit que la partie $A \subset \mathbb{R}$ est majorée s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq M$ pour tout $a \in A$. Un tel réel M est un majorant de A.*

Proposition 1.9 Borne supérieure. *Soit une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée. Alors cette partie admet un plus petit majorant qu'on appelle la borne supérieure de A et qu'on note* $\sup A$.

Si M est un majorant de A, tout réel $M_1 \geq M$ majore également A. Par contre, la borne supérieure est unique.

Lorsque A possède un plus grand élément $\alpha \in A$, on a $\sup A = \alpha$.

Lorsque la partie A n'est pas majorée, on note $\sup A = +\infty$.

On conviendra que $\sup \emptyset = -\infty$. Cette convention assure, pour toutes parties (vides, ou non) de $\mathbb{R}$, l'égalité $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Exercice 1.10 Montrer que $\sup A = +\infty$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un élément $a_n \in A$ tel que $a_n \geq n$.

Proposition 1.11 *Soient $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée, et $M \in \mathbb{R}$. Montrer que $M = \sup A$ si et seulement si :*

1. *on a l'inégalité $a \leq M$ pour tout $a \in A$ (autrement dit, M est un majorant de A) ;*
2. *et l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :*
   (a) *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ avec $a > M - \varepsilon$*
   (b) *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ avec $a \geq M - \varepsilon$*
   (c) *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \to M$ lorsque $n \to \infty$.*

On remarquera que, lorsque la condition 1. est satisfaite, les conditions (a), (b) et (c) sont équivalentes.

Preuve Laissée au lecteur (elle sera donnée en cours). □

Exercice 1.12 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$. Montrer l'égalité

$$\sup\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \sup\left\{\sup A_i \mid i \in I\right\}.$$

De façon symétrique, on introduit bien sûr la notion de minorant et de borne inférieure.

Définition 1.13 Minorant. *Soit $A \subset \mathbb{R}$. La partie A est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $a \geq m$ pour tout $a \in A$.*

Proposition 1.14 Borne inférieure. *Une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure $m \in \mathbb{R}$, qui est le plus grand de ses minorants.*

Lorsque la partie $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas minorée, on note $\inf A = -\infty$. Lorsque la partie est vide, on convient que $\inf \emptyset = +\infty$.

Exercice 1.15 Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie minorée.

1. On note $-A = \{\, -a \mid a \in A\}$. Montrer que $-A$ et majorée, et qu'on a l'égalité $-\inf A = \sup(-A)$.
2. En s'inspirant de la proposition 1.11, donner alors une caractérisation de $\inf A$.

Exemple 1.16 Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. On a $\sup A = \sqrt{2}$ et $\inf A = -\sqrt{2}$. Noter que ni $\sup A$, ni $\inf A$, n'appartiennent ici à A.

Exercice 1.17 Soit $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. On a $\sup B = \sqrt{2}$ et $\inf B = -\sqrt{2}$.

A.4 Compacité

Rappelons qu'un segment est un intervalle fermé borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (où $a \leq b$).

Définition 1.18 Compacité. *Une partie $X \subset \mathbb{R}$ (ou un espace métrique (X,d)) est compacte si elle vérifie la propriété suivante : de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point $\alpha \in X$.*

Proposition 1.19 Théorème de Bolzano-Weierstrass.
Un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est compact.

Cela signifie que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels tels que $a \leq x_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $a \leq \alpha \leq b$ et une suite extraite $(x_{\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $x_{\varphi(n)} \to \alpha$ lorsque $n \to \infty$. De toute suite bornée de réels, on peut donc extraire une sous-suite convergente.

Exercice 1.20 Les intervalles $]0,1]$ et $[0,\infty[$ sont-ils compacts ?

A.5 Complétude

Ce paragraphe peut être omis en première lecture. Il ne sera en effet pas utilisé avant le chapitre 8.

Définition 1.21 Suites convergentes, suites de Cauchy.
Soient (X,d) un espace métrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X.
Rappelons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in X$, lorsque $d(x_n,\ell) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N = N(\varepsilon) \geq 0$ tel que $d(x_n,x_p) \leq \varepsilon$ dès que $n,p \geq N$.

Lemme 1.22 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace métrique (X,d).*
Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est de Cauchy.

Preuve Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n,\ell) < \varepsilon/2$ lorsque $n \geq N$. L'inégalité triangulaire assure alors que $d(x_n,x_p) \leq \varepsilon$ dès que $n,p \geq N$. Notre suite est donc de Cauchy. □

Toute suite convergente est donc de Cauchy. A l'inverse, lorsque toute suite de Cauchy est convergente, on parle d'espace métrique complet.

Définition 1.23 Espace complet. *On dit que l'espace métrique (X,d) est complet lorsque toute suite de Cauchy de (X,d) est convergente.*

Proposition 1.24 *L'espace métrique $\mathbb{R}$ est complet. Ceci signifie que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de réels, alors cette suite est convergente.*

La proposition précédente affirme que $\mathbb{R}$ est complet pour la distance définie, pour $x, y \in \mathbb{R}$, par $d(x,y) = |x-y|$. Dans $\mathbb{R}$, une suite est donc de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

Exemple 1.25 **1.** Soit $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ muni de la distance définie par $d(1/n, 1/p) = |1/n - 1/p|$ $(n, p \geq 1)$. Alors (A, d) n'est pas complet : la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de terme général $x_n = 1/n$ est de Cauchy, mais elle ne converge pas (dans l'espace A).

2. L'espace métrique $\mathbb{Q}$ (ensemble des rationnels) n'est pas complet.

Ecrivons en effet le développement décimal de $\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$, avec $a_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et soit $x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (on le vérifie facilement ou bien on invoque le fait que, vue comme une suite de nombres réels, elle converge vers $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$). Par contre, puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, cette suite n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$.

Quel est l'intérêt de cette notion de suite de Cauchy ? Supposons qu'on veuille montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels converge. Si l'on revient à la définition, il faut déjà disposer de la limite ℓ, et montrer que $x_n - \ell \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Si l'on ne connaît pas cette limite ℓ – ce qui est le cas en général – on est bien embarrassés ! Par contre, il est plus facile de montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, puisque cela revient à estimer les différences $|x_n - x_p|$ lorsque n et p sont grands. Et, puisque $\mathbb{R}$ est complet, une fois qu'on a montré que la suite est de Cauchy, on sait qu'elle est convergente.

A.6 Des démonstrations !

Démontrons les assertions évoquées dans la remarque grisée de la page 10. Tous les arguments sont donnés, mais vous devrez prendre le crayon pour rédiger les détails : excellent exercice... N'hésitez pas à faire des dessins !

• *Supposons avoir montré que $\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure. Montrons que $\mathbb{R}$ est complet.*
La propriété de la borne supérieure assure qu'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée converge vers $\alpha = \sup\{y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que cette suite converge. Pour cela, on va se ramener à une suite croissante. On commence par remarquer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En effet (avec $\varepsilon = 1$), il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_N - x_n| \leq 1$ lorsque $n \geq N$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = \inf\{x_p \mid p \geq n\}$ (propriété de la borne inf...). La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est croissante et majorée, converge vers $\alpha = \sup\{y_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Reste à montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers α. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x_p| \leq \varepsilon$ lorsque $n, p \geq N_1$ (suite de Cauchy). Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n - \alpha| \leq \varepsilon$ lorsque $n \geq N_2$ (convergence de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Soit enfin $N = \sup(N_1, N_2)$. Pour $n, p \geq N$, on aura $x_p \geq x_n - \varepsilon$ et donc $x_n - \varepsilon \leq y_n \leq x_n$, d'où $|x_n - \alpha| \leq |x_n - y_n| + |y_n - \alpha| \leq 2\varepsilon$.

• *Supposons avoir montré que $\mathbb{R}$ est complet. Montrons qu'un segment est compact.*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui prend ses valeurs dans le segment $I_0 = [a, b]$. On souhaite construire une suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$, extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et qui soit convergente. Puisque l'on sait que $\mathbb{R}$ est complet, il suffit que la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ soit de Cauchy, elle convergera alors.

On procède par "dichotomie" (du grec "division en deux parties") et l'on construit récursivement une suite d'intervalles emboîtés $I_p \subset I_{p-1} \subset \cdots \subset I_0$, où $I_0 = [a, b]$ est de longeur $\ell = b - a$, et I_p de longueur $\ell/2^p$, de sorte que chaque I_p contienne une infinité de termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On peut alors construire récursivement une suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$, avec $y_0 = x_0$, et telle que $y_p \in I_p$ et $y_p = x_{n(p)}$ où $n(p) > n(p-1)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. La condition $y_p \in I_p$ assure que la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, puisque les intervalles I_p sont emboîtés de longueur tendant vers 0. La condition $n(p) > n(p-1)$ assure que la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• *Supposons avoir montré qu'un segment est compact. Montrons que $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure.*

Soit $A \subset \,]-\infty, M]$ une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. On va construire une suite décroissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de majorants de A, qui convergera vers $\sup A$.
On choisit $a \in A$. On pose $x_0 = M$, $y_0 = a$ et on note $\delta = x_0 - y_0$. On peut supposer $\delta > 0$, sinon $a = \max A = \sup A$... et c'est fini !

— Si $(x_0 + y_0)/2$ majore A, on pose $y_1 = a$ et $x_1 = (x_0 + y_0)/2$.

— Sinon, on pose $y_1 = (x_0 + y_0)/2$ et $x_1 = M$.

En itérant ce procédé, on construit récursivement deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de sorte que x_n majore A, y_n ne majore pas A, et avec $0 < x_n - y_n = \delta/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Puisque les segments sont compacts, cette suite admet une sous-suite convergente, de limite $\alpha \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, elle converge elle-même vers α. Chaque x_n majorant A, α est un majorant de A. C'est le plus petit puisqu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément $a_n \in A$ tel que $a_n \geq y_n = x_n - \delta/2^n \geq \alpha - \delta/2^n$.

B Fonctions : convergence, continuité

B.1 Convergence simple et uniforme

Définition 1.26 Convergence simple.

Soient X un ensemble, et $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ des fonctions. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(x, \varepsilon) \ \textit{ tel que } \forall n \geq N \textit{ on a } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f si, pour chaque point $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ des valeurs prises par les fonctions en ce point converge vers $f(x)$.

Nous serons fréquemment amenés par la suite à manipuler des fonctions indicatrices (d'intervalles, pour l'intégrale de Riemann, ou de parties plus baroques – parties mesurables– dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue). Il est donc indispensable d'être à l'aise avec cette notion.

Notation 1.27 *Nous désignerons par $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de la partie $A \subset X$, définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon.*

Exercice 1.28 Soient X un ensemble, et $A, B \subset X$ deux parties. Montrer qu'on a l'inclusion $A \subset B$ si et seulement si on a l'inégalité $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$.

Exercice 1.29 Montrer que les suites de fonctions définies par $f_n = \mathbb{1}_{[1/n,1]}$ et $g_n = \mathbb{1}_{]1/n,1]}$ convergent simplement, et déterminer leurs limites.

Les deux exemples de l'exercice précédent relèvent du même résultat général, que nous énonçons ci-dessous.

Proposition 1.30 *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

Alors la suite de fonctions indicatrices $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ lorsque $n \to \infty$.

Preuve Si $x \notin A$, on a *a fortiori* $x \notin A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite des valeurs $(\mathbb{1}_{A_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire, égale à 0.

Si $x \in A$, il existe un entier n_0 tel que $x \in A_{n_0}$. La suite de parties étant croissante, on a donc $x \in A_n$ pour tout $n \geq n_0$ et la suite des valeurs $(\mathbb{1}_{A_n}(x))_{n\geq n_0}$ est donc stationnaire, égale à 1. Le résultat est prouvé. □

Exercice 1.31 Déduire de la proposition 1.30 la propriété suivante (ou bien la démontrer directement). Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire telles que $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note $B = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Alors la suite de fonctions indicatrices $(\mathbb{1}_{B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction indicatrice $\mathbb{1}_B$ lorsque $n \to \infty$.

Il faut aussi savoir gérer des suites de fonctions indicatrices, pour des suites de parties qui ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Exercice 1.32 Montrer que les suites de fonctions définies par $f_n = \mathbb{1}_{[-1/n,1+1/n]}$, $g_n = \mathbb{1}_{[-1/n,1-1/n]}$ et $h_n = \mathbb{1}_{[1/n,1+1/n]}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ convergent simplement, et déterminer leur limites. On commencera par esquisser les graphes de ces fonctions.

Exercice 1.33 Soient $a < b$ deux réels. On se donne deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a < a_n \leq b_n < b$ et on suppose que $a_n \to a$ et $b_n \to b$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que les suites de fonctions définies par $u_n = \mathbb{1}_{[a_n,b_n]}$ et $v_n = \mathbb{1}_{]a_n,b_n[}$ convergent simplement lorsque $n \to \infty$, et déterminer leurs limites.

Définition 1.34 Convergence uniforme.

Soient X un ensemble, et $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) des fonctions. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \text{ tel que } \forall x \in X,\ \forall n \geq N \text{ on a } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Remarque 1.35 Disons-le avec des mots !
Convergence simple : En chaque point $x \in X$, la valeur $f_n(x)$ en ce point est arbitrairement proche de $f(x)$ pourvu que n soit assez grand (cet «assez grand»dépendant à la fois de x et de la marge d'erreur ε).

Convergence uniforme : En tous les points $x \in X$, la valeur $f_n(x)$ est arbitrairement proche de $f(x)$ pourvu que n soit assez grand (cet «assez grand»dépendant uniquement de la marge d'erreur ε, et non plus de x comme dans la convergence simple).

Exercice 1.36 Démontrer que, lorsqu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, elle converge a fortiori simplement vers f.

Exercice 1.37 Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = x/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$). Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $f \equiv 0$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.38 Soient les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour $n \geq 1$ par

$$f_n = \mathbb{1}_{[n,\infty[}\,,\ g_n = \mathbb{1}_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}\,,\ h_n = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\,,\ k_n = (-1)^n \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\,,\ \ell_n = \frac{(-1)^n}{n}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}\,.$$

Les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simplement sur $\mathbb{R}$? uniformément sur $\mathbb{R}$? uniformément sur $[0, 1]$? Déterminer, le cas échéant, leur limite.

Remarque 1.39 On définirait de même la convergence simple ou uniforme d'une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, dans $\mathbb{R}^n$, ou bien dans n'importe quel espace métrique Y.

Notation 1.40 *Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|,\ x \in X\} \in [0, +\infty]\,.$$

La fonction f est donc bornée si et seulement si $\|f\|_\infty \in [0, +\infty[$.
Cette notation permet de ré-exprimer la convergence uniforme de façon concise, comme suit.

Propriété 1.41 *Soient X un ensemble, et $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ lorsque les différences $(f_n - f)$ sont bornées dès que n est assez grand, et si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Preuve Laissée en exercice. □

B.2 Continuité

Nous allons voir que la convergence uniforme conserve la continuité. On introduit ici un espace métrique abstrait X. Vous pouvez penser que $X = \mathbb{R}$, ou que X est un intervalle de $\mathbb{R}$, ou bien que $X = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.42 Continuité.
Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un espace métrique X est continue si

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta = \eta(x, \varepsilon) > 0 \text{ tel que}$$
$$\text{si } y \in X \text{ vérifie } d(x,y) < \eta \text{ alors } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Rappelons le critère bien utile suivant, qui nous servira par exemple dans la démonstration de la continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Proposition 1.43 Critère séquentiel de continuité.
Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un espace métrique X est continue au point $x \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X convergeant vers x, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Preuve $\Rightarrow$ Supposons que f soit continue au point $x \in X$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X convergeant vers x. Soit $\varepsilon > 0$. La continuité de f en x assure qu'il existe $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ dès que $|x - y| < \eta$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \eta$ dès que $n \geq N$. On a donc $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ dès que $n \geq N$. Autrement dit, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

$\Leftarrow$ Démontrons la contraposée. On suppose que la fonction f n'est pas continue au point $x \in X$. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe un point $y(\eta)$ avec $|y(\eta) - x| < \eta$ mais tel que $|f(y(\eta)) - f(x)| \geq \varepsilon$. Pour $\eta = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), on pose $x_n = y(1/n)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge bien vers x. Mais on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge donc pas vers $f(x)$. □

Proposition 1.44 Convergence uniforme et continuité.
Soit X un espace métrique. Soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) des fonctions continues. On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. Alors la limite $f : X \to \mathbb{R}$ est également continue.

Preuve On doit montrer que f est continue en chaque point de X. Soit donc $x \in X$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$: on veut montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pourvu que y soit assez proche de x.

La convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f assure qu'il existe un rang n_0 tel que, pour tout $y \in X$, on ait $|f_{n_0}(y) - f(y)| \leq \varepsilon/3$.

Ensuite, on exprime la continuité au point x de cette fonction particulière f_{n_0}. Il existe $\eta > 0$ tel que $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq \varepsilon/3$ dès que $|x - y| \leq \eta$. L'inégalité triangulaire montre alors que, si $|x - y| \leq \eta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \leq \varepsilon\,. \quad \square$$

Remarque 1.45 Par contraposée on obtient que, si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues converge simplement vers une fonction discontinue f, alors la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 1.46 Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f_n(x) = x^n$ lorsque $0 \leq x \leq 1$ et $f_n(x) = 1$ lorsque $x \geq 1$ ($n \geq 1$). Esquisser le graphe de f_n. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 1.47 Reprendre la preuve de la proposition 1.44 pour montrer que si les fonctions f_n sont seulement supposées continues en un point $x_0 \in X$, et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors la limite f est encore continue au point x_0.

Les propriétés suivantes sont conséquence de la compacité des segments.

Corollaire 1.48 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un segment. Alors f est bornée sur ce segment, autrement dit $\|f\|_\infty < \infty$.*

Preuve Soit $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \in [0, +\infty]$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points $x_n \in [a, b]$ telle que $|f(x_n)| \to M$ lorsque $n \to \infty$. Quitte à passer à une suite extraite, la proposition 1.18 assure qu'il existe un point $\alpha \in [a, b]$ tel que $x_n \to \alpha$. Par continuité de f, il suit que $f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ et donc $M = |f(\alpha)| < \infty$. $\square$

Nous utiliserons à plusieurs reprises la propriété suivante.

Corollaire 1.49 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet des limites finies en $\pm\infty$. Alors, la fonction f est bornée.*

Preuve Notons $\alpha = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\beta = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. Il existe donc $A > 0$ tel que $|f(x)| \leq M_0 := \sup(|\alpha|, |\beta|) + 1$ dès que $|x| \geq A$.

Par ailleurs, le corollaire 1.48 assure que la fonction f est bornée sur le segment $[-A, A]$. Notons $M_1 := \sup_{|x|\leq A} |f(x)| < \infty$. On a alors la majoration $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq \sup(M_0, M_1) < \infty$ comme annoncé. $\square$

C Dénombrabilité

On ne vous demandera pas d'être des pros des questions de cardinalité, mais simplement de savoir ce qu'est un ensemble dénombrable et d'avoir en tête les exemples élémentaires : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Définition 1.50 *On dit que deux ensembles X et Y ont même cardinal lorsqu'il existe une bijection $j : X \to Y$.*

Lorsque X a le même cardinal que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, on dit que X est dénombrable.

Proposition 1.51 *Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

En particulier, toute partie de $\mathbb{N}$ est finie, ou bien dénombrable (on dit aussi qu'une partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable).

Lemme 1.52 *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.*

Preuve Soit $A \subset \mathbb{N}$ non vide, et choisissons $\alpha \in A$. On considère alors $B = \{a \in A \,|\, a \leq \alpha\}$. Comme partie non vide et finie de $\mathbb{N}$, B admet un plus petit élément $\beta := \min\{b \in B\}$. Par construction, $\beta = \min A \in A$ est le plus petit élément de A. □

Preuve de la proposition 1.51. Soit $A \subset \mathbb{N}$ une partie infinie de $\mathbb{N}$. On construit une bijection $j : \mathbb{N} \to A$ récursivement comme suit. On pose $j(0) = \min A$ (ce qui est licite d'après le lemme précédent).

Supposons construits $(j(0), \ldots, j(k))$ $(k \in \mathbb{N})$. On introduit la partie $A_{k+1} = A \setminus \{j(0), \ldots, j(k)\}$ (non vide puisque A est infinie), et l'on pose $j(k+1) = \min A_{k+1}$.

L'application $j : \mathbb{N} \to A$ est injective puisqu'on a, par construction, $j(k+1) \neq j(p)$ pour $p < k+1$. L'application $j : \mathbb{N} \to A$ est surjective puisque, lorsque $p \in A \subset \mathbb{N}$, on a $p \in j(\{0, \ldots, p\})$. □

Corollaire 1.53 *Soit X un ensemble dénombrable. Alors toute partie $A \subset X$ est finie ou dénombrable (i.e. au plus dénombrable).*

Exercice 1.54 Un ensemble X est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une surjection $s : \mathbb{N} \to X$.

Proposition 1.55 *L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.*

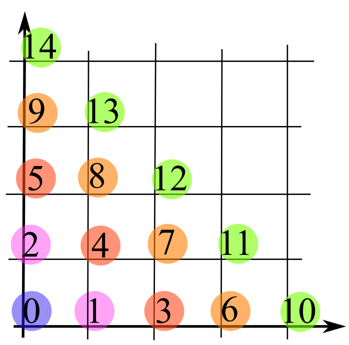


FIGURE 1.1 – Enumération de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Preuve Il s'agit de construire une bijection $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ou, en d'autres termes, de numéroter les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Pour cela, on procède en suivant l'indication de la figure 1.1 les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ correspondant aux noeuds du quadrillages (points de $\mathbb{R}^2$ à coordonnées dans $\mathbb{N}$). $\square$

Corollaire 1.56 *1. Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*

2. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Proposition 1.57 *L'intervalle $[0, 1[$ et donc le corps des réels ne sont pas dénombrables.*

Preuve Utiliser le développement décimal d'un réel et le procédé diagonal de Cantor. Voir le cours. $\square$

2. Intégrale de Lebesgue : fonctions positives

Pour définir l'intégrale de Lebesgue, on doit commencer par définir l'intégrale des fonctions mesurables positives. Cette construction est un peu longue, et nécessite l'introduction des deux notions abstraites de tribu et de mesure. Nous la reportons donc au chapitre 9 pour pouvoir passer plus rapidement aux applications.

Nous supposons donc construite l'intégrale de Lebesgue des fonctions positives. Dans ce chapitre, nous énonçons ses principales propriétés 2.4, dont le théorème de convergence monotone qui sera démontré en 9.35.

— Règles de calcul et limites dans $[0, +\infty]$ (2.1, 2.2, 2.3).

— Propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives :
l'énoncé de 2.4.
En particulier, le théorème de convergence monotone 2.4.(4).

— L'intégration sur une partie $B \subset \mathbb{R}$ (définition 2.8, remarque 2.9).

— Le corollaire 2.12 et sa démonstration.

— Séries de fonctions mesurables positives :
le corollaire 2.14 et sa démonstration.

— Le lemme de Fatou "simplifié" 2.17, sans démonstration.

— Les contre-exemples de l'exercice 2.18.

A A propos de la mesurabilité

Dans nos énoncés, il sera fréquemment question de “fonctions mesurables” ou de "parties mesurables". Dans ce paragraphe, nous expliquons brièvement de quoi il retourne, et pourquoi on ne sera pas (au moins pour cette année) réellement préoccupés par les questions de mesurabilité.

Dans le chapitre 9, on verra que, pour pouvoir définir l’intégrale d’une fonction positive $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, puis d’une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il faut que cette fonction soit “un petit peu régulière” en un sens spécifique à cette théorie, c’est-à-dire que f soit mesurable (on dit également borélienne). Mais, pour produire une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ ou $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou, ce qui revient au même, une partie de $\mathbb{R}$) qui ne soit pas mesurable, il faut se donner beaucoup de mal (voir 9.21).

Ceci fait que, dans dans la pratique, les fonctions que vous rencontrerez seront toutes mesurables. Notamment une fonction continue, une fonction continue par morceaux, une somme, un produit, un sup ou un inf de deux fonctions mesurables, une fonction pour laquelle on dispose d’une expression explicite, ou encore la limite simple d’une suite de fonctions mesurables sont mesurables.

Il est cependant important de garder dans un coin de la tête ces questions de mesurabilité car cette notion devient pertinente lorsqu’on ne se contente plus d’intégrer pour la mesure de Lebesgue des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, et que l’on aborde par exemple l’étude des Probabilités non élémentaires.

Le mode d’emploi pour cette année est donc le suivant.

1. Je donne des énoncés justes... donc, dans mes hypothèses, je demande (par exemple) que les fonctions soient mesurables.

2. Dans les exercices, vous énoncez le théorème que vous voulez appliquer, en incluant les hypothèses de mesurabilité.
Puis vous vérifiez soigneusement que toutes les hypothèses sont satisfaites dans votre cas, SAUF la mesurabilité qui est admise comme “allant de soi”.

B Arithmétique dans $[0, +\infty]$

Dans ce chapitre, il va être question de fonctions et d'intégrales à valeurs positives éventuellement infinies, donc à valeurs dans $[0, +\infty]$. Commençons donc par définir les règles de calcul qui seront en vigueur.

Définition 2.1 Règles de calcul dans $[0, \infty]$**.**

On convient de poser

- $c + \infty = +\infty$ *pour tout* $c \in [0, +\infty]$ *;*
- $c \cdot \infty = \infty$ *pour tout* $c \in]0, +\infty]$ *;*
- $0 \cdot \infty = 0$.

Attention à la dernière convention.

Usuellement, l'expression $0 \cdot \infty$ est une forme indéterminée : penser aux limites en 0^+ des fonctions $x \to x\frac{1}{x}$ ou $x \to x\,\frac{1}{x^2}$, ou encore $x \to x^2\frac{1}{x}$... et nous ne changeons pas d'avis sur ce point !

Dans le contexte qui nous occupe, on doit cependant convenir que $0 \cdot \infty = 0$, l'objectif étant que l'intégrale de la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (aire d'un rectangle de hauteur nulle et de base infinie) soit égale à 0. De même, l'intégrale de la fonction $\infty \mathbb{1}_{\{x\}}$ (nulle partout sauf au point $x \in \mathbb{R}$) sera nulle.

Définition 2.2 Limites dans $[0, \infty]$**.**

Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $[0, +\infty]$.

- *On dit que la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $+\infty$ *si* x_n *est arbitrairement grand lorsque* n *est assez grand : pour tout réel* M*, il existe un rang* N *tel qu'on ait* $x_n \in [M, \infty]$ *pour tout* $n \geq N$.
- *La suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers un réel* $\ell \in [0, \infty[$ *lorsque la suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est finie à partir d'un certain rang et converge vers* ℓ *au sens usuel.*

Nous utiliserons de façon répétée la remarque fondamentale suivante. C'est grâce à elle que nous sommes heureux de travailler dans $[0, +\infty]$ plutôt que dans $[0, +\infty[$!

Lemme 2.3 *Une suite croissante* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $[0, +\infty]$ *converge dans* $[0, +\infty]$ *vers* $\alpha := \sup x_n \in [0, +\infty]$.

C Intégration des fonctions positives

Nous démontrerons au tout dernier chapitre 9 le résultat suivant. Cet énoncé est la pierre angulaire de notre cours. En l'utilisant comme point de départ, nous allons en effet dérouler toute la théorie de l'intégration. Vous devez donc dès maintenant en connaître l'énoncé, et savoir l'utiliser.

Théorème 2.4 Intégrale de Lebesgue des fonctions positives, résumé.
Il existe une application qui, à une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ positive, associe son "intégrale de Lebesgue" notée $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \in [0, +\infty]$.

Cette intégrale est :

1. **Normalisée :** *pour tous réels $a \leq b$, la fonction $\mathbb{1}_{[a,b]}$ est mesurable et on a l'égalité $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]} \, d\lambda = b - a$.*
2. **Croissante :** *si $f, g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ sont mesurables positives et telles que $f \leq g$, on a $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda$.*
3. **Positivement linéaire :** *pour $f, g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ mesurables positives et $\alpha, \beta \in [0, \infty]$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est mesurable et on a*

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g) \, d\lambda = \alpha \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda + \beta \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda \, .$$

L'intégrale de Lebesgue satisfait également le

4. **Théorème de convergence monotone (ou de Beppo Levi) :** *si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante (c'est-à-dire avec $f_n \leq f_{n+1}$) de fonctions mesurables positives $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$, alors sa limite $f := \lim f_n = \sup f_n$ est mesurable positive et on peut échanger limite et intégrale :*

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to +\infty} f_n \, d\lambda = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \, .$$

Remarque 2.5 Les trois premières propriétés sont requises de toute théorie de l'intégration (voir l'Introduction), et étaient déjà satisfaites par l'intégrale de Riemann.

La condition de normalisation (1.) est familière. La croissance (2.) découle de l'additivité dans (3.) et de la positivité de l'intégrale.

La condition (3.) préfigure la linéarité de l'intégrale (voir la proposition 3.6). Pour le moment, nous ne considérons que des fonctions (mesurables) positives, celles-ci ne forment donc pas un espace vectoriel et il n'y a donc pas lieu de parler de linéarité.

Exercice 2.6
1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{a\}} \, d\lambda$, $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,\infty[} \, d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1} \, d\lambda$, où $\mathbf{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne la fonction constante égale à 1.
2. Soient $a < b$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{]a,b[} \, d\lambda = b - a$.
3. Le théorème de convergence monotone s'applique-t-il à la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = \mathbb{1}_{[n,\infty[}$?

Remarque 2.7 Le théorème de convergence monotone est le premier des grands théorèmes de l'intégrale de Lebesgue. On en déduira le lemme de Fatou ainsi que le théorème de convergence dominée.

Dans le théorème de convergence monotone, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions positives ; cette suite de fonctions converge donc simplement vers une fonction f à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Par croissance de l'intégrale (propriété 2.) la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales $I_n := \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \in [0, +\infty]$ est alors une suite croissante de réels (étendus) positifs ; elle converge donc vers un certain $J \in [0, +\infty]$. L'information que nous donne le théorème est que la limite J des intégrales des f_n est égale à l'intégrale de la limite des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, soit $J = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$.

On peut également souhaiter intégrer des fonctions sur une partie $B \subset \mathbb{R}$. La manip suivante permet de se ramener sans effort à l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Définition 2.8 Intégration sur une partie.

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable.

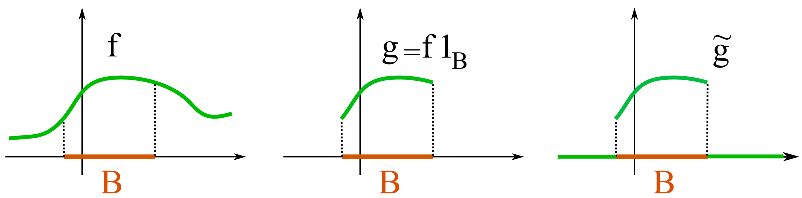
Si $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est mesurable positive, on définit l'intégrale de f sur la partie B en introduisant la fonction tronquée $f\,\mathbb{1}_B$ (mesurable) et en posant

$$\int_B f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}} (f\,\mathbb{1}_B) \, d\lambda \,.$$

Si $g : B \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable positive définie sur la partie B, on introduit la fonction mesurable $\tilde{g} : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ obtenue en prolongeant g par 0 en dehors de B, et on pose

$$\int_B g \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}} \tilde{g} \, d\lambda = \int_B \tilde{g} \, d\lambda \,.$$

Remarque 2.9 Il suit immédiatement des définitions que les propriétés (2, 3 et 4) du théorème 2.4 sont encore satisfaites par l'application $f \to \int_B f \, d\lambda$, en particulier le théorème de convergence monotone.



Exercice 2.10 Soient $a < b$ deux réels, et soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Montrer l'égalité des intégrales $\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_{]a,b[} f \, d\lambda$.

Remarque 2.11 Spoiler. Rassurez-vous, l'intégrale de Lebesgue n'est pas un objet si mystérieux. Soit $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ une fonction continue (que nous supposons positive pour l'instant car, à ce stade, ce sont les seules fonctions dont nous avons défini l'intégrale) définie sur un segment. Nous démontrerons en 3.15 l'égalité

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda = \int_a^b f(t) \, dt$$

de ses intégrales de Lebesgue (à gauche) et de Riemann (à droite).

D Conséquences du théorème de Beppo Levi

Voici une première conséquence du théorème de convergence monotone. Voir également la variante 2.13, et plus tard la proposition 3.19 pour des fonctions à valeurs complexes. Ceci nous permettra de ramener le calcul de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle non compact au calcul d'intégrales sur des segments, ce qui est particulièrement intéressant à la lumière du Spoiler 2.11 : on renvoit à l'exemple 3.22 pour voir comment ça fonctionne.

Corollaire 2.12 *Soient* $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert (borné, ou non borné) et* $f :]a,b[\to [0,+\infty]$ *une fonction mesurable positive. Soient* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de réels avec* $a < a_n < b_n < b$*, et telles que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *décroisse vers* a *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croisse vers* b*. Alors on a l'égalité*

$$\int_{]a,b[} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} f\, d\lambda\,.$$

Preuve La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, les intervalles $[a_n,b_n] \subset [a_{n+1},b_{n+1}]$ $(n \in \mathbb{N})$ sont emboîtés. La fonction f étant supposée positive, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables définies sur $]a,b[$ par $f_n := f\mathbb{1}_{[a_n,b_n]}$ est donc croissante. Ces fonctions sont positives.

Puisque $a_n \to a$ et $b_n \to b$, on a convergence simple $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{[a_n,b_n]} = \mathbb{1}_{]a,b[}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers f sur son intervalle de définition $]a,b[$. Le théorème de convergence monotone s'applique alors pour donner le résultat (voir en effet la remarque 2.9). □

Exemple 2.13 Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty]$ une fonction mesurable positive. La preuve du corollaire 2.12 et l'exercice 2.10 donnent les égalités

$$\textstyle\int_{[0,\infty[} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} f\, d\lambda \quad\text{et}\quad \int_{[0,1]} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,1]} f\, d\lambda.$$

Le théorème de convergence monotone permet aussi de calculer l'intégrale d'une fonction définie comme somme d'une série de fonctions positives.

Corollaire 2.14 Séries de fonctions positives.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables positives* $u_n : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$*. Alors la série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge simplement vers une fonction mesurable* $u : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$*, et on peut échanger somme et intégrale :*

$$\int_{\mathbb{R}} u\, d\lambda := \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\Big)\, d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{R}} u_n\, d\lambda\Big)\,.$$

Preuve On applique le théorème de convergence monotone à la suite des sommes partielles $f_p := \sum_{n=0}^{p} u_n$. En effet, $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge vers la somme $u := \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Le résultat annoncé découle alors de la propriété 3. du théorème 2.4, puisque

$$\sum_{n=0}^{p} \int_{\mathbb{R}} u_n\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_p\, d\lambda \xrightarrow[p\to\infty]{\text{convergence monotone}} \int_{\mathbb{R}} u\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\Big)\, d\lambda\,. \quad \square$$

Remarque 2.15 L'additivité de l'intégrale (théorème 2.4.(3)) permet a priori seulement d'intervertir une somme finie et l'intégrale. Dans le corollaire 2.14, nous échangeons une série (somme infinie) avec l'intégrale : il nous faut donc un argument supplémentaire, en l'occurrence le théorème de convergence monotone.

Exercice 2.16 Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. Montrer que la fonction indicatrice de A, qui est mesurable, est d'intégrale nulle : $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \, d\lambda = 0$.
On pourra écrire $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathbb{1}_A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{a_n\}}$.

Exemples : la fonction indicatrice $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, et a fortiori la fonction indicatrice $g := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ des rationnels de $[0,1]$, sont mesurables d'intégrales nulles.

On a donc déjà gagné par rapport à l'intégrale de Riemann. En effet la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, qui est pourtant obtenue comme limite croissante d'une suite de fonctions en escalier, n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Du théorème de convergence monotone on déduit le lemme de Fatou. Il s'agit toujours d'une suite de fonctions mesurables positives, mais cette suite n'est plus supposée croissante. Même si l'on ne peut alors plus échanger limite et intégrale, une inégalité persiste. Nous énonçons une version simpliste de ce lemme (voir 2.23 pour le lemme de Fatou dans toute sa puissance).

Lemme 2.17 Lemme de Fatou (version simpliste).
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ mesurables positives. On suppose que

1. *la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$;*
2. *la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales $I_n := \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$ converge vers $I \in [0,\infty]$.*

Alors, la fonction f est mesurable et positive et on a l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \, .$$

Les exemples de l'exercice 2.18 illustrent les deux raisons pour lesquelles on ne peut pas toujours échanger limite et intégrale :

1. *Evanescence :* la masse part à l'infini.
2. *Concentration :* la masse se concentre vers un point.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée 4.25 excluront ces cas défavorables.

Exercice 2.18

1. *Evanescence :* Etudier l'exemple où $f_n : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n(x) = 0$ si $x \leq n$ et $f_n(x) = 1$ si $x > n$.
2. *Concentration :* Etudier l'exemple de la suite $g_n : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $g_n(x) = 0$ si $x \leq 0$ ou $x \geq 1/n$, et $g_n(x) = n$ si $0 < x < 1/n$.

On esquissera les graphes des (f_n) et (g_n).

Le résultat élémentaire suivant nous servira dans la preuve du lemme de Fatou. Il permet de remplacer une suite réelle convergente par une suite croissante de même limite.

Lemme 2.19 *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, avec* $x_n \in [0,+\infty]$*, une suite convergente de limite* $\ell \in [0,+\infty]$*. On pose* $y_n = \inf_{k\geq n} x_k \in [0,+\infty]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. La suite* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est alors croissante, et elle converge toujours vers* $\ell \in [0,+\infty]$*.*

Preuve La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car l'inf est pris sur un ensemble de plus en plus petit.

Supposons d'abord que $x_n \to \infty$. Soit $M > 0$. Il existe un rang N tel que l'on ait $x_n \geq M$ pour tout $n \geq N$. Il suit alors que $y_n \geq M$ si $n \geq N$ et donc la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Supposons maintenant que $x_n \to \ell \in [0,\infty[$ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que l'on ait $\ell - \varepsilon \leq x_n \leq \ell + \varepsilon$, et donc $\ell - \varepsilon \leq y_n \leq \ell + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ. □

Preuve du lemme de Fatou On introduit les fonctions $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ ($n \in \mathbb{N}$). Le lemme précédent, que l'on applique aux suites de réels positifs $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $x \in \mathbb{R}$, assure que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore simplement vers f. Mais la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est maintenant croissante (et toujours positive) : on peut donc lui appliquer le théorème de convergence monotone, d'où l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda\,. \tag{2.1}$$

On va maintenant chercher à majorer $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par construction, on a la majoration $g_n \leq f_k$ pour tout $k \geq n$. Il suit, par monotonie de l'intégrale, que $\int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_k\, d\lambda =: I_k$ pour tout $k \geq n$. Par hypothèse, on a $I_k \xrightarrow[k\to\infty]{} I$. On peut donc passer à la limite dans cette inégalité, à n fixé, lorsque $k \to \infty$. Il vient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda \leq I$.

On passe alors à la limite dans cette dernière inégalité lorsque $n \to \infty$, et il vient finalement avec (2.1) ce qu'on voulait démontrer : que

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda \leq I = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda\,.$$

□

Dans l'énoncé ci-dessus du lemme de Fatou, il est un peu dommage de devoir supposer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ainsi que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de leurs intégrales. Heureusement, le lemme de Fatou admet une version plus générale. Elle fait intervenir la notion de limite inférieure d'une suite de nombres réels (ou à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$), qui est toujours définie et que nous rappelons ci-dessous.

Définition 2.20 Limite inférieure.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$. La suite de terme général $y_n = \inf_{k\geq n} x_k \in [-\infty, +\infty]$ est croissante. Elle admet donc une limite dans $[-\infty, +\infty]$: c'est la limite inférieure de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on note

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geq n} x_k\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \big(\inf_{k\geq n} x_k\big) .$$

On définit de même la limite supérieure de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geq n} x_k\big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \big(\sup_{k\geq n} x_k\big) .$$

Exercice 2.21
1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On suppose que cette suite converge vers $\ell \in [-\infty, +\infty]$. Déterminer sa limite inférieure, et sa limite supérieure.
2. Déterminer les limites inférieure et supérieure des suites respectivement définies pour $n \geq 1$ par : $x_n = n$, $y_n = -n$, $z_n = (-1)^n$, $u_n = (-1)^n + 1/n$, $v_n = 0$ si n est pair et $v_n = n$ si n est impair.

On peut alors définir la limite inférieure d'une suite de fonctions à valeurs réelles.

Définition 2.22 *Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions. La limite inférieure de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\liminf f_n : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$, est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(\liminf f_n)(x) = \liminf(f_n(x))$.*

On laisse au lecteur le soin de définir la limite supérieure d'une suite de fonctions à valeurs réelles : nous n'en aurons pas besoin ici.

Nous pouvons maintenant énoncer le "vrai" lemme de Fatou.

Théorème 2.23 Lemme de Fatou (version complète).
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ mesurables positives. On a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\lambda \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda .$$

La démonstration de ce théorème est laissée au lecteur. Elle est semblable à celle de la version simplifiée.

Exercice 2.24 On introduit la suite de fonctions $h_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $h_{2n} = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $h_{2n+1} = \mathbb{1}_{[1,2]}$.

1. Montrer que la limite inférieure $f := \liminf h_n$ de cette suite de fonctions est $f = \mathbb{1}_{\{1\}}$.
2. Que vaut $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$?
3. Déterminer la $\liminf$ de la suite réelle $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_{\mathbb{R}} h_n \, d\lambda$.

3. Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

De l'intégrale des fonctions positives, on déduit la notion de fonction intégrable au sens de Lebesgue puis d'intégrale d'une fonction intégrable.

— La définition d'une fonction Lebesgue intégrable à valeurs dans $[0, +\infty]$, puis à valeurs réelles ou complexes, et de son intégrale (3.2 et 3.7).

— La définition des espaces vectoriels $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B)$ et $\mathcal{L}^1(B)$ et les premières propriétés de l'intégrale de Lebesgue (3.6 et 3.9).

— La proposition 3.11 (en particulier les critères d'intégrabilité) et sa démonstration.

— Le lemme 3.13 (théorème fondamental de l'analyse) et sa démonstration.

— Le lien entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue 3.15, sans démonstration.

— Les méthodes de calcul (proposition 3.18), sans démonstration.

— La proposition 3.19 et sa démonstration.

— Les propriétés 3.25 de l'intégrale de Lebesgue, sans démonstration.

— Les fonctions de référence : les trois propositions de la section G (propositions 3.29, 3.32 et 3.33) sans démonstration.

A Fonctions intégrables à valeurs réelles

Jusqu'ici, on dispose uniquement de l'intégrale des fonctions mesurables positives. Cette intégrale est à valeurs dans $[0, +\infty]$.

On va maintenant définir, lorsque c'est possible (c'est-à-dire lorsque cette fonction est "intégrable"), l'intégrale d'une fonction mesurable $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de signe quelconque en se ramenant aux intégrales de fonctions positives.

Définition 3.1 Parties positive et négative d'une fonction.

Soient $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable et $f : B \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

On introduit sa partie positive $f^+ := \max(f, 0)$ et sa partie négative $f^- := \max(-f, 0)$, de sorte que $f = f^+ - f^-$.

Les fonctions f^+ et f^- sont deux fonctions mesurables positives (elles sont à valeurs finies, i.e. dans $[0, \infty[$).

La fonction valeur absolue de f, égale à $|f| = f^+ + f^-$, est également mesurable (et positive).

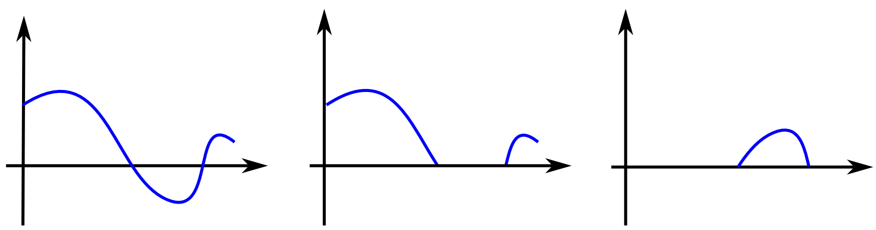


FIGURE 3.1 – *Les graphes de f, et de ses parties positive f^+ et négative f^-*

On définit maintenant les fonctions intégrables : comme leur nom l'indique, ce sont les fonctions dont on saura définir l'intégrale, qui est un réel (fini !)

Définition 3.2 Fonction réelle intégrable, intégrale de Lebesgue.

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable.

1. *Une fonction mesurable positive $f : B \to [0, +\infty]$ est intégrable si et seulement si son intégrale est finie, soit $\int_B f \, d\lambda \in [0, +\infty[$.*
2. *Une fonction mesurable à valeurs réelles $f : B \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si sa valeur absolue $|f| : B \to [0, +\infty[$, qui est une fonction mesurable positive, est intégrable c'est-à-dire si et seulement si*
$$\int_B |f| \, d\lambda = \int_B f^+ \, d\lambda + \int_B f^- \, d\lambda \in [0, +\infty[\,.$$
Dans ce cas, on définit l'intégrale de Lebesgue de f comme étant
$$\int_B f \, d\lambda := \int_B f^+ \, d\lambda - \int_B f^- \, d\lambda \in \mathbb{R}.$$

Remarque 3.3 • On sait attribuer une intégrale à n'importe quelle fonction mesurable positive (théorème 2.4). Cette intégrale prend ses valeurs dans $[0, +\infty]$.

Néanmoins (attention, peau de banane cachée sous les définitions !), cette fonction positive n'est pas toujours intégrable : on dit qu'elle l'est lorsque son intégrale est finie, i.e. à valeurs dans $[0, +\infty[$.

• Lorsque la fonction $f : B \to \mathbb{R}$ est intégrable, ses parties positive et négative sont intégrables : leurs intégrales appartiennent à $[0, +\infty[$. Il suit que l'expression $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda := \int_B f^+\,d\lambda - \int_B f^-\,d\lambda$ qui définit alors $\int_B f$ n'est jamais la forme indéterminée $\infty - \infty$. Ouf !

Exemple 3.4 Les fonctions $f_1 = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$, $f_2 = (\mathbb{1}_{[0,+\infty[} - \mathbb{1}_{[-1,0]})$ ou encore $f_3 = (\mathbb{1}_{[0,+\infty[} - \mathbb{1}_{]-\infty,0]})$ ne sont pas intégrables. Par contre, la fonction $f_4 = (\mathbb{1}_{[-4,-1]} + 3\mathbb{1}_{[0,1]})$ est intégrable (que vaut son intégrale ?).

La fonction $g_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\mathbb{1}_{]n-1,n]}$ n'est pas intégrable. On en déduit que la fonction $g_2 : x \in \mathbb{R} \to (1/x)\mathbb{1}_{]1,\infty[}$ n'est pas intégrable. La fonction g_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $g_3(x) = 1/x$ lorsque $|x| \geq 1$ et $g_3(x) = 0$ sinon n'est pas intégrable.

Les fonctions $h_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\mathbb{1}_{]n,n+1]}$ et $h_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\mathbb{1}_{]n,n+1]}$ sont intégrables. La fonction $h_3 : x \in \mathbb{R} \to (1/x^2)\mathbb{1}_{]1,\infty[}$ est intégrable .

Lorsque f est une fonction intégrable, on va voir que l'on peut également calculer son intégrale à partir de toute décomposition de f comme différence de deux fonctions positives intégrables (qui ne sont donc pas forcément ses parties positive et négative).

Lemme 3.5 *Soient $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable, et $f : B \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On suppose qu'on a une décomposition $f = f_1 - f_2$, où $f_1, f_2 : B \to [0, \infty[\subset \mathbb{R}$ sont deux fonctions (mesurables) positives intégrables. Alors on a l'égalité*

$$\int_B f\,d\lambda = \int_B f_1\,d\lambda - \int_B f_2\,d\lambda \in \mathbb{R}.$$

Preuve On a deux décompositions $f = f^+ - f^- = f_1 - f_2$ de notre fonction. Il suit que $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$. Les fonctions intervenant dans cette égalité sont mesurables et positives, donc le théorème 2.4 assure qu'on a l'égalité $\int_B f^+\,d\lambda + \int_B f_2\,d\lambda = \int_B f_1\,d\lambda + \int_B f^-\,d\lambda$. Par hypothèse, les quatre intégrales intervenant dans cette identité sont finies. On en déduit donc (puisque, par hypothèse, il n'y pas de forme indéterminée $\infty - \infty$!) que

$$\int_B f\,d\lambda := \int_B f^+\,d\lambda - \int_B f^-\,d\lambda = \int_B f_1\,d\lambda - \int_B f_2\,d\lambda\,.$$

□

Proposition 3.6 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue (1).
Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. On désigne par $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B)$ l'ensemble des fonctions (mesurables) $f : B \to \mathbb{R}$ qui sont intégrables sur B.

1. *L'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B)$ est naturellement un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

L'intégrale de Lebesgue

$$I : f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B) \to \int_B f \, d\lambda \in \mathbb{R}$$

vérifie les propriétés suivantes :

2. **linéarité :** *$I : \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B) \to \mathbb{R}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire ;*
3. **croissance :** *pour $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B)$ avec $f \leq g$, on a $\int_B f \, d\lambda \leq \int_B g \, d\lambda$;*
4. **inégalité triangulaire :** *pour toute fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B)$, on a l'inégalité*
$$\left|\int_B f \, d\lambda\right| \leq \int_B |f| \, d\lambda \, .$$

Lorsque $B = \mathbb{R}$, on pourra simplement noter $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs réelles qui sont intégrables.

Preuve 1. Structure d'espace vectoriel. Rappelons que l'intégrale des fonctions mesurables positives est positivement linéaire (théorème 2.4 (3)). Soient donc $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B)$ deux fonctions intégrables, et t un réel.
La fonction $f + g$ est mesurable et la fonction $|f + g|$ est d'intégrale finie puisque $|f + g| \leq |f| + |g|$. Cela prouve que $f + g$ est intégrable.
La fonction tf est mesurable, avec $|tf| = |t|\,|f|$ d'intégrale finie. Donc tf est intégrable.

2a. Additivité. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(B)$. Pour déterminer l'intégrale de $f+g$, on ne va pas tenter de déterminer ses parties positive et négative en fonction de celles de f et g, mais plutôt utiliser le lemme 3.5. On écrit en effet

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

Les fonctions $f^+ + g^+$ et $f^- + g^-$ sont mesurables positives, et d'intégrales finies. On a donc en utilisant le lemme 3.5, puis l'additivité de l'intégrale des fonctions positives, et enfin en regroupant les termes :

$$\begin{aligned}
\int_B (f + g) \, d\lambda &= \int_B (f^+ + g^+) \, d\lambda - \int_B (f^- + g^-) \, d\lambda \\
&= \int_B f^+ \, d\lambda + \int_B g^+ \, d\lambda - \int_B f^- \, d\lambda - \int_B g^- \, d\lambda \\
&= \int_B f \, d\lambda + \int_B g \, d\lambda \, .
\end{aligned}$$

2b. Homogénéité. Soient f intégrable et $t \in \mathbb{R}$. En revenant à la définition de l'intégrale $\int_B (tf)\, d\lambda$, puis en utilisant de nouveau le théorème 2.4 (3), on obtient que $\int_B (tf)\, d\lambda = t \int_B f\, d\lambda$ puisque :
$*$ $(tf)^+ = tf^+$ et $(tf)^- = tf^-$ lorsque $t \geq 0$;
$*$ $(tf)^+ = |t|\, f^-$ et $(tf)^- = |t|\, f^+$ lorsque $t < 0$.

3. Croissance. L'intégrale est positive et linéaire, elle est donc croissante. Il suffit en effet d'écrire l'inégalité $\int_B h\, d\lambda \geq 0$ pour la fonction mesurable positive $h = g - f \geq 0$.

4. Inégalité triangulaire. Soit f intégrable. Puisque $|f| = f^+ + f^-$, on a en utilisant l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$:

$$|\int_B f\, d\lambda| = |\int_B f^+\, d\lambda - \int_B f^-\, d\lambda| \leq \int_B f^+\, d\lambda + \int_B f^-\, d\lambda = \int_B |f|\, d\lambda\,. \quad \square$$

B Fonctions intégrables à valeurs complexes

Nous serons naturellement amenés à intégrer des fonctions à valeurs complexes. C'est incontournable lorsque l'on introduit la transformée de Fourier.

On se ramène immédiatement aux fonctions à valeurs réelles en séparant les parties réelles et imaginaires. Il n'y a aucune difficulté supplémentaire.

Définition 3.7 Fonction complexe intégrable, intégrale de Lebesgue.

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable.

Soit $f = u + iv : B \to \mathbb{C}$. La fonction f est mesurable si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire $u, v : B \to \mathbb{R}$ sont mesurables.

On dit que la fonction f est intégrable lorsque son module $|f| : B \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable. C'est le cas si et seulement si ses parties réelle et imaginaire u et v sont toutes les deux intégrables. Dans ce cas on définit l'intégrale de f par

$$\int_B f\, d\lambda := \int_B u\, d\lambda + i \int_B v\, d\lambda\,.$$

Remarque 3.8 L'équivalence des critères d'intégrabilité vient de ce que $|u| \leq |f|$ et $|v| \leq |f|$, ainsi que de l'inégalité triangulaire $|f| \leq |u| + |v|$.

La proposition 3.6 s'étend aux fonctions intégrables à valeurs complexes.

Proposition 3.9 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue (2).

Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. On désignera par $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(B)$, ou plus simplement $\mathcal{L}^1(B)$, l'ensemble des fonctions $f : B \to \mathbb{C}$ qui sont intégrables. On notera en particulier $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1. *L'ensemble* $\mathcal{L}^1(B)$ *est naturellement un* **espace vectoriel** *sur* $\mathbb{C}$.
2. *L'intégrale* $I : f \in \mathcal{L}^1(B) \to \int_B f\,d\lambda \in \mathbb{C}$ *est* **$\mathbb{C}$-linéaire**.
3. *L'intégrale vérifie* **l'inégalité triangulaire** *: pour* $f \in \mathcal{L}^1(B)$*, on a*

$$|\int_B f\,d\lambda| \leq \int_B |f|\;d\lambda\,.$$

Remarque 3.10 Dans l'inégalité triangulaire, il s'agit maintenant de modules de nombres complexes (et non plus de valeurs absolues).

Preuve 1. et 2. sont conséquences immédiates de la proposition 3.6 et de la définition 3.7.

3. Ce n'est pas difficile, mais il va falloir se fatiguer un petit peu plus que dans le cas réel !

L'intégrale $J = \int_B f\,d\lambda$ est un nombre complexe. Il existe donc un nombre complexe $e^{is} \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $|J| = e^{is}J$. Par $\mathbb{C}$-linéarité de l'intégrale (2.) on a donc

$$|J| = e^{is}J = \int_B e^{is} f\,d\lambda \in [0,\infty[\,.$$

La contribution dans $e^{is}J$ de la partie imaginaire de la fonction $e^{is}f$ est donc nulle, c'est-à-dire que $\int_B \mathrm{Im}\,(e^{is}f)\,d\lambda = 0$. Il vient donc

$$|J| = \int_B \mathrm{Re}\,(e^{is}f)\,d\lambda \leq \int_B |e^{is}f|\,d\lambda = \int_B |f|\,d\lambda$$

par monotonie de l'intégrale des fonctions réelles et puisque $|e^{is}| = 1$. □

Il faut bien connaître les résultats élémentaires, mais fondamentaux, suivants.

Proposition 3.11 *Soit* $B \subset \mathbb{R}$ *une partie mesurable.*

1. *Soient* $g : B \to [0,+\infty]$ *intégrable et* $f : B \to \mathbb{C}$ *mesurable telle que* $|f| \leq g$*. Alors,* f *est intégrable.*
2. *Soient* $f, g : B \to \mathbb{C}$ *mesurables telles que* $|f| \leq |g|$*. Si* g *est intégrable,* f *l'est aussi. Si* f *n'est pas intégrable,* g *non plus.*
3. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction mesurable. On suppose que* f *est nulle en dehors d'une partie bornée* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *et que* f *est bornée : il existe* $M \in \mathbb{R}$ *avec* $|f(x)| \leq M$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. Alors* f *est intégrable.*
4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *intégrable.*
   (a) *La fonction* f *est également intégrable sur* B.
   (b) *Soient* $A, B \subset \mathbb{R}$ *deux parties mesurables disjointes. On a l'égalité* $\int_{A\cup B} f\,d\lambda = \int_A f\,d\lambda + \int_B f\,d\lambda$.
5. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *intégrable. On a l'égalité* $\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_{]a,b[} f\,d\lambda$.

Preuve Indispensable... mais élémentaire à partir des définitions, et donc laissée au lecteur. La preuve sera cependant donnée en cours. □

Exercice 3.12

1. Soient $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ et $h_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) des fonctions intégrables au sens de Lebesgue.
   On suppose que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$. Montrer que $\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} h_n\, d\lambda$.
   Ce résultat très faible (car l'hypothèse de convergence uniforme est très forte), réminiscent de ce que l'on connaît déjà pour l'intégrale de Riemann, sera bientôt pulvérisé par le théorème de convergence dominée.
2. Soit la suite de fonctions définie par $h_n = (1/n)\mathbb{1}_{[0,n]}$. Montrer que cette suite converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle $f \equiv 0$. A-t-on $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n\, d\lambda$?

C Intégrer une fonction continue sur un segment

Dans un cours précédent, vous avez introduit l'intégrale de Riemann. Elle permet d'intégrer une fonction qui est définie sur un segment et qui est suffisament régulière – disons continue. On sera rassurés de savoir que, pour une fonction continue sur un segment, ses intégrales au sens de Riemann et de Lebesgue coïncident.

Les énoncés suivants sont également valables pour des fonctions à valeurs complexes : il suffit de séparer parties réelle et imaginaire pour les démontrer.

Lemme 3.13 Théorème fondamental de l'analyse.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un segment.
L'expression $F(x) = \int_{[a,x]} f\, d\lambda$ définit une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $F(a) = 0$ et pour laquelle $F'(x) = f(x)$ pour tout $a < x < b$.

En d'autres termes, F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Preuve La fonction f, continue sur un segment, y est bornée (corollaire 1.48). La proposition 3.11 assure donc que F est bien définie. En notant $M = \|f\|_\infty$, l'inégalité $|F(x) - F(y)| \le M\,|x - y|$ pour tous $x, y \in [a, b]$ est alors conséquence de la proposition 3.6. Il suit que F est continue sur ce segment.

Soient maintenant $x \in\,]a, b[$ et $\alpha > 0$ tel que $[x - \alpha, x + \alpha] \subset [a, b]$. Pour tout $0 \le h \le \alpha$, il suit de la proposition 3.11(4b) les égalités

$$F(x + h) = F(x) + \int_{]x,x+h]} f\, d\lambda$$
$$F(x) = F(x - h) + \int_{]x-h,x]} f\, d\lambda\, .$$

Exprimons la continuité de la fonction f au point $x \in]a,b[$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$, que l'on peut supposer vérifier également $\eta \leq \alpha$, et tel que $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ dès que $t \in [x-\eta, x+\eta]$.

Pour $0 < h \leq \eta$, on a donc les inégalités $|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq h\varepsilon$ et $|F(x-h) - F(x) + hf(x)| \leq h\varepsilon$. La fonction F est donc bien dérivable en x, de dérivée $F'(x) = f(x)$, puisque

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)\,. \qquad \square$$

Remarque 3.14 La même démonstration montre que F est dérivable à droite en a et à gauche en b, avec $F'_d(a) = f(a)$ et $F'_g(b) = f(b)$.

Corollaire 3.15 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a \leq b$) une fonction continue définie sur un segment. Alors f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ et ses intégrales au sens de Riemann et de Lebesgue coïncident :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{[a,b]} f\,d\lambda\,. \tag{3.1}$$

Preuve du corollaire 3.15

Le lemme 3.13 assure que la fonction F est l'unique primitive de f telle que $F(a) = 0$. On a donc $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in [a,b]$. $\square$

Remarque 3.16 A l'attention de ceux d'entre vous qui ont l'intégrale de Riemann très présente à l'esprit...

Il faut imposer que $a \leq b$ pour avoir l'égalité des intégrales (rappelons en effet la convention $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ pour l'intégrale de Riemann).

L'intégrale de Riemann est une intégrale orientée : on intègre de a à b, ou bien de b à a. Tandis que, dans l'intégrale de Lebesgue, on intègre sur le segment $[a,b]$.

Notation 3.17 On réservera la notation $\int_a^b f(t)\,dt$ à l'intégrale, au sens de Riemann, d'une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ définie sur un segment. Pour une telle fonction, rappelons que le corollaire 3.15 assure l'égalité des intégrales au sens de Riemann et de Lebesgue, soit $\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(t)\,dt$.

Il ne suffit pas d'avoir défini l'intégrale de Lebesgue, il s'agit aussi de savoir mener des calculs effectifs ! Dans le cas d'une fonction continue sur un segment, le corollaire 3.15 identifie l'intégrale de Riemann avec celle de Lebesgue : on peut donc, sans surprise, utiliser les méthodes de calcul (ci-dessous) dont on a l'habitude.

Proposition 3.18 Méthodes de calcul, sur un segment. *Soient $a < b$.*

1. **Primitive.** *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors $\int_{[a,b]} f\, d\lambda = F(b) - F(a)$.*
2. **Intégration par parties.** *Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. On a alors*
$$\int_{[a,b]} uv'\, d\lambda = \big[u\, v\big]_a^b - \int_{[a,b]} u'v\, d\lambda\,.$$
3. **Changement de variable.**
Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $I = \varphi([a,b])$ l'intervalle image.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur I et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors
$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi)\, \varphi'\, d\lambda = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\,.$$

Preuve 1. est conséquence du lemme 3.13 puisque, F étant une primitive de f, la fonction $t \in [a,b] \to F(t) - F(a)$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

2. C'est 1. appliqué à la fonction continue $f = (uv' + u'v)$, qui admet la fonction uv comme primitive.

3. C'est 1. appliqué à la fonction continue $(f \circ \varphi)\, \varphi'$, qui admet la fonction $F \circ \varphi$ comme primitive. □

D Intégrer sur un intervalle ouvert

Nous savons maintenant intégrer les fonctions (intégrables) à valeurs réelles, et non plus seulement les fonctions positives. Nous pouvons donc généraliser le corollaire 2.12 comme suit.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle qui n'est pas un segment (I est donc un intervalle non fermé et/ou non borné). Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue, que l'on suppose intégrable sur I. La proposition fondamentale suivante (ou une variante, voir par exemple 3.20) permettra de ramener le calcul de l'intégrale de Lebesgue $\int_I f\, d\lambda$ au calcul d'intégrales (au sens de Lebesgue ou de Riemann : ici c'est indifférent) de cette fonction continue f sur des segments.

Proposition 3.19 *Soient $]a,b[\ \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert (borné, ou non borné) et $f :]a,b[\ \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels avec $a < a_n < b_n < b$, et telles que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroisse vers a et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croisse vers b. Alors la fonction f est intégrable sur chacun des segments $[a_n, b_n]$, et on a l'égalité*
$$\int_{]a,b[} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} f\, d\lambda\,.$$

Preuve Pour simplifier la rédaction, nous supposerons que f est à valeurs réelles (sinon, on n'a qu'à séparer parties réelle et imaginaire). L'hypothèse faite sur les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ assure que $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'intervalles dont la réunion vérifie $\cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] =]a, b[$.

Introduisons, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction tronquée $f_n = f\mathbb{1}_{[a_n,b_n]}$. L'inégalité $|f_n| \leq |f|$ assure que chacune des fonctions f_n est intégrable.

On peut appliquer le corollaire 2.12 aux parties positive f^+ et négative f^- de f, en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les égalités $f_n^\pm = f^\pm\mathbb{1}_{[a_n,b_n]}$. On obtient donc $\int_{]a,b[} f^\pm\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} f^\pm\, d\lambda$, et on obtient le résultat annoncé en revenant à la définition 3.2 des intégrales de f et des f_n. □

Exemple 3.20 Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On a l'égalité $\int_{[0,+\infty[} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} f\, d\lambda$.

Notation 3.21 Lorsque $B \subset \mathbb{R}$ est une partie mesurable quelconque, et $f : B \to \mathbb{C}$ est intégrable, on pourra également noter l'intégrale de Lebesgue de f sur B en faisant apparaître la variable d'intégration comme suit :

$$\int_B f\, d\lambda = \int_B f(t)\, d\lambda(t)\,.$$

Cette dernière notation sera plus raisonnable lorsque l'on remplace la fonction abstraite f par une expression explicite (voir l'exemple 3.22), et se révèlera indispensable si l'on souhaite préciser la "variable d'intégration" (ici t), par exemple lorsqu'on étudie une intégrale dépendant d'un paramètre comme au paragraphe 4.C.

Exemple 3.22 Voyons comment les méthodes que nous venons de décrire s'appliquent au calcul de l'intégrale $I = \int_{[1,\infty[} e^{-t} \sin t\, d\lambda(t)$.

• La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et admet $t \mapsto -e^{-t}$ pour primitive.

On commence par montrer que $f : t \in [1, \infty[\mapsto e^{-t} \in [0, +\infty]$, qui est mesurable et positive, est intégrable. En effet, le corollaire 2.12 (ou l'exemple 2.13) donnent l'égalité

$$\int_{[1,\infty[} e^{-t}\, d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} e^{-t}\, d\lambda(t)\,.$$

Chacune des intégrales de droite est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[1, n]$. La proposition 3.18(1) s'applique donc, et on obtient

$$\int_{[1,n]} e^{-t}\, d\lambda(t) = e^{-1} - e^{-n}\,,$$

d'où

$$\int_{[1,\infty[} e^{-t}\, d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} e^{-t}\, d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} (e^{-1} - e^{-n}) = e^{-1} < \infty\,.$$

• Soit alors $g : t \in [1, \infty[\mapsto e^{-t} \sin t \in \mathbb{R}$. Puisque $|g| \leq f$ avec f intégrable, la fonction g est intégrable (proposition 3.11). Autrement dit I est bien définie.

• Pour calculer I on peut alors se ramener à intégrer sur des segments, puisque la proposition 3.19 assure l'égalité

$$I := \int_{[1,\infty[} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t) \, .$$

• Chacune des intégrales $I_n = \int_{[1,n]} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t)$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. On peut donc intégrer par parties (c'est la proposition 3.18 (2)). On obtient alors

$$\begin{aligned} I_n = \int_{[1,n]} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t) &= [-e^{-t} \sin t]_1^n + \int_{[1,n]} e^{-t} \cos t \, d\lambda(t) \\ &= [-e^{-t} \sin t]_1^n - [e^{-t} \cos t]_1^n - \int_{[1,n]} e^{-t} \sin t \, d\lambda(t) \, . \end{aligned}$$

On a donc $2I_n = e^{-1}(\sin 1 + \cos 1) - e^{-n}(\sin n + \cos n)$ puis, en faisant tendre n vers ∞, l'égalité $I = e^{-1}(\sin 1 + \cos 1)/2$.

On observera la méthode suivie dans l'exemple 3.22 :
• On commence par montrer que la fonction g est intégrable.
• On se ramène alors à intégrer cette fonction g sur des segments $[1, n]$.
• Sur chaque segment $[1, n]$ on peut alors intégrer par parties.

On n'intègre pas directement par parties sur un intervalle qui n'est pas un segment !

Remarque 3.23 Dans la rédaction de l'exemple suivant nous avons choisi de nous en tenir, à toutes les étapes, aux intégrales de Lebesgue. A partir du moment où l'on se met à intégrer notre fonction continue sur un segment, on aurait pu utiliser des intégrales de Riemann (ce n'est alors qu'une question de notation, on parle de la même chose) et écrire

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_1^n e^{-t} \sin t \, dt$$

avec, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_n = \int_1^n e^{-t} \sin t \, dt &= [-e^{-t} \sin t]_1^n + \int_1^n e^{-t} \cos t \, dt \\ &= [-e^{-t} \sin t]_1^n - [e^{-t} \cos t]_1^n - \int_1^n e^{-t} \sin t \, dt \, . \end{aligned}$$

E Lebesgue versus Riemann

Les intégrales de Riemann et de Lebesgue d'une fonction continue (ou continue par morceaux) définie sur un segment sont toutes deux bien définies, et coïncident.

Considérons maintenant la fonction continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = (\sin x/x)$ pour $x > 0$.
Cette fonction n'est pas intégrable au sens de Lebesgue : on a en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la minoration $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(x)|\,dx \geq 2/(n+1)$ (comparaison avec la série harmonique). Par contre, la fonction f admet une intégrale de Riemann semi-convergente sur $[0, +\infty[$, au sens où lintégrales $\int_0^y f(x)\,dx$ admettent une limite finie $\lim_{y\to\infty} \int_0^y f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ lorsque $y \to +\infty$ (l'existence de cette limite s'obtient par comparaison avec la série harmonique alternée).

Les intégrales au sens de Lebesgue et de Riemann ne sont donc pas toujours réconciliables (hors le cas continu sur un segment...)

Par prudence, nous nous interdirons donc dans ce cours de faire référence à l'intégrale de Riemann généralisée (ou impropre, ou semi-convergente). En effet, comme illustré ci-dessus par l'exemple de la fonction sinus cardinal $x \mapsto (\sin x)/x$, les choses se compliquent singulièrement lorsqu'on cherche à intégrer des fonctions à valeurs réelles ou complexes (et non plus positives).

Citons cependant, pour satisfaire votre curiosité, le résultat suivant concernant les fonctions à valeurs positives (dont l'énoncé se décline avec tout intervalle ouvert à droite et/ou à gauche).

Proposition 3.24 Intégrale de Riemann généralisée d'une fonction positive.

Soit $f : [0, \infty[\to [0, +\infty[$ *une fonction continue positive, de primitive* $F : [0, \infty[\to \mathbb{R}$.

La fonction f *est intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle* $[0, +\infty[$ *si et seulement si* $F(x)$ *a une limite finie lorsque* $x \to \infty$.

C'est le cas si et seulement si f *admet une intégrale de Riemannn généralisée sur* $[0, +\infty[$. *On a alors l'égalité*

$$\int_{[0,+\infty[} f\,d\lambda = \int_0^\infty f(t)\,dt\,.$$

F Propriétés d'invariance

Les propriétés de l'intégrale de Lebesgue que nous énonçons ci-dessous vous sont déjà familières dans le cadre de l'intégrale de Riemann. Elles restent valable pour l'intégrale de Lebesgue. Nous les retrouverons au chapitre 5 comme cas particulier du théorème de changement de variable 5.28 (exercice 5.32).

Proposition 3.25 Propriétés d'invariance de l'intégrale.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction intégrable.*
Les fonctions $\tau_x f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t-x) \in \mathbb{C}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$, $\check{f} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(-t) \in \mathbb{C}$ *et* $f_s : t \in \mathbb{R} \mapsto f(st) \in \mathbb{C}$ *pour* $s \neq 0$ *sont également intégrables, et on a :*

Translation : $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)\, d\lambda(t)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Dilatation : $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\lambda(t) = |s| \int_{\mathbb{R}} f(st)\, d\lambda(t)$ *pour tout* $s \neq 0$.

Symétrie : $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(-t)\, d\lambda(t)$.

Toutes ces identités restent valables, dans $[0,+\infty]$, *lorsque la fonction* $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ *est mesurable positive.*

Remarque 3.26 • Attention à ne pas oublier la valeur absolue dans l'égalité $\int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\lambda(t) = |s| \int_{\mathbb{R}} f(st)\, d\lambda(t)$.
Garde-fou : penser que l'intégrale d'une fonction positive doit être positive !

• La propriété de symétrie est un cas particulier de celle qui précède (dilatation), avec $s = -1$.

Exercice 3.27 En admettant que les propriétés de 3.25 sont vérifiées pour les fonctions mesurables positives (proposition 9.38), les démontrer pour les fonctions intégrables.

Exercice 3.28 1. Soit $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ une fonction mesurable 1-périodique.

(a) Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, l'égalité

$$\int_{[0,n]} f(t)\, d\lambda(t) = n \int_{[0,1]} f(t)\, d\lambda(t)\,.$$

(b) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'égalité

$$\int_{[0,1]} f(nt)\, d\lambda(t) = \int_{[0,1]} f(t)\, d\lambda(t)\,.$$

2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable et 1-périodique, et un entier $n \geq 1$. On suppose que f est intégrable sur $[0,1]$. Montrer alors que la fonction $t \in [0,1] \to f(nt) \in \mathbb{C}$ est intégrable sur cet intervalle, et qu'on a l'égalité

$$\int_{[0,1]} f(nt)\, d\lambda(t) = \int_{[0,1]} f(t)\, d\lambda(t)\,.$$

G Points de repère et tours de main

Pour montrer qu'une fonction est, ou n'est pas, intégrable on sera bien souvent amenés à la comparer à une fonction "connue" dont on sait qu'elle est (ou pas) intégrable.

Les exemples suivants, qui fournissent déjà une belle liste de "fonctions de référence", devront donc être connus et leur (non)-intégrabilité pourra être utilisée sans démonstration dans les copies – pourvu que l'énoncé apparaisse clairement.

Proposition 3.29 Quelques fonctions de référence.

1. *La fonction* $x \mapsto x^a$ *est intégrable sur* $]0,1]$ *ssi* $a > -1$.
2. *La fonction* $x \mapsto x^a$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *ssi* $a < -1$.
3. *La fonction* $x \mapsto \ln(x)$ *est intégrable sur* $]0,1]$.
4. *La fonction* $x \mapsto e^{-ax}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *ssi* $a > 0$.
5. *La fonction* $x \mapsto e^{-ax^b}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *ssi* $a > 0$ *et* $b > 0$. *En particulier, la fonction* $x \mapsto e^{-ax^2}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *ssi* $a > 0$.

Exercice 3.30 Esquisser sur un même graphique, et pour différentes valeurs de $a \in \mathbb{R}$, les graphes des fonctions $x \in [0,+\infty[\mapsto x^a \in [0,+\infty[$. De même pour les fonctions $x \in [0,+\infty[\mapsto e^{-ax} \in [0,+\infty[$ et $x \in [0,+\infty[\mapsto e^{-x^a} \in [0,+\infty[$.

Les fonctions citées dans la proposition 3.29 sont de signe constant (toutes sont positives, sauf $x \mapsto \ln(x)$ qui est négative) sur leur intervalle de définition. Elles sont donc Lebesgue intégrables si et seulement si elles admettent une intégrale de Riemann généralisée (proposition 3.24).

Les résultats de cette proposition vous sont donc déjà familiers !

Preuve On utilise les résultats vus dans les paragraphes précédents : en particulier théorème de convergence monotone pour se ramener à intégrer sur un segment, utilisation de primitives sur un segment, comparaison de fonctions (voir si besoin la proposition 3.33)...

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : x \in]0,1] \mapsto x^a \in [0,+\infty[$ est positive. Lorsque $a \geq 0$, on peut remarquer d'emblée que f_a est continue sur le segment $[0,1]$. Elle y est donc intégrable... ainsi que sur l'intervalle $]0,1]$ (ce que nous retrouverons ci-dessous).

Soit $a \in \mathbb{R}$. Puisque $f_a \geq 0$, le théorème de convergence monotone donne l'égalité $\int_{]0,1]} x^a \, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{[1/n,1]} x^a \, d\lambda(x)$. La fonction f_a est donc intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si cette limite est finie.

Supposons en un premier temps que $a \neq -1$. La fonction f_a admet alors pour primitive la fonction $x \mapsto x^{a+1}/(a+1)$. Il vient donc $\int_{[1/n,1]} x^a \, d\lambda(x) =$

$(1-n^{-a-1})/(a+1)$. Lorsque $n\to\infty$, cette quantité tend vers l'infini pour $a<-1$ (la fonction n'est alors pas intégrable sur $]0,1]$), et a une limite finie pour $a>-1$ (la fonction est alors intégrable sur $]0,1]$ et son intégrale vaut $1/(a+1)$).

Si maintenant $a=-1$, la fonction f_{-1} admet pour primitive la fonction logarithme. On a donc $\int_{[1/n,1]} x^{-1}\,d\lambda(x) = -\ln(1/n) = \log n \to \infty$ lorsque $n\to\infty$. Ainsi f_{-1} n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

2. Pour $a\in\mathbb{R}$, la fonction $g_a : x\in[1,\infty[\ \mapsto x^a \in [0,+\infty[$ est positive. Lorsque $a\geq 0$, on peut remarquer d'emblée que $g_a(x)\geq 1$ pour tout $x\geq 1$ et la fonction g_a n'est donc pas intégrable sur $[1,\infty[$ (ce que nous retrouverons ci-dessous).

Soit $a\in\mathbb{R}$. Puisque $g_a\geq 0$, le théorème de convergence monotone donne l'égalité $\int_{[1,\infty[} x^a\,d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]} x^a\,d\lambda(x)$. La fonction g_a est donc intégrable sur $[1,\infty[$ si et seulement si cette limite est finie.

Supposons en un premier temps que $a\neq -1$. La fonction g_a admet alors pour primitive la fonction $x\mapsto x^{a+1}/(a+1)$. Il vient donc $\int_{[1,n]} x^a\,d\lambda(x) = (n^{a+1}-1)/(a+1)$: lorsque $n\to\infty$, cette quantité tend vers l'infini pour $a>-1$ (la fonction n'est alors pas intégrable sur $[1,\infty[$) et a une limite finie pour $a<-1$ (la fonction est alors intégrable sur $[1,\infty[$).

Si maintenant $a=-1$, la fonction g_{-1} admet pour primitive la fonction logarithme. On a donc $\int_{[1,n]} x^{-1}\,d\lambda(x) = \ln n \to \infty$ lorsque $n\to\infty$. Ainsi g_{-1} n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$.

3. • La fonction $x\mapsto \ln x$ est négative sur l'intervalle $]0,1]$, et y admet pour primitive sur $[0,+\infty[$ la fonction $x\mapsto x\ln x - x$. On estime

$$\begin{aligned}\int_{[1/n,1]} |\ln x|\,d\lambda(x) &= -\int_{[1/n,1]} \ln x\,d\lambda(x) = [x - x\ln x]_{1/n}^{1}\\ &= (1-1/n) + (1/n)\ln(1/n) \to_{n\to\infty} 1 < \infty\,.\end{aligned}$$

La fonction $x\mapsto \ln x$ est donc intégrable sur $]0,1]$, et son intégrale vaut -1.

• Si l'on n'est pas intéressés par le calcul effectif de cette intégrale, on peut se contenter de comparer $|\ln x|$ au voisinage de 0 avec une fonction puissance intégrable.

Soit $b>0$. On sait que $x\ln x\to 0$ lorsque $x\to 0$. Puisque $b>0$, on en déduit qu'on a également $bx^b\ln x = x^b\ln x^b \to 0$ lorsque $x\to 0$. On introduit alors la fonction $x\in\,]0,1]\mapsto x^b\ln x\in\mathbb{R}$: on vient de voir que cette fonction se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est donc bornée sur $]0,1]$: il existe une constante M_b telle que $|\ln x|\leq M_b\,x^{-b}$ pour tout $0<x\leq 1$. Pour la valeur de votre choix $0<b<1$ cela assure, par comparaison et d'après le (1), que la fonction $x\mapsto\ln x$ estintégrable sur $]0,1]$.

4. Soit $h_a : x\in[0,+\infty[\ \mapsto e^{-ax}\in[0,+\infty[$. C'est une fonction positive. Lorsque $a\leq 0$, cette fonction est minorée par la fonction constante égale à 1, et n'est donc pas intégrable sur $[0,+\infty[$. Montrons que h_1 est intégrable.

Cette fonction admet pour primitive la fonction $x \mapsto -e^{-x}$. Le théorème de convergence monotone assure donc de nouveau les égalités

$$\int_{[1,\infty[} e^{-x}\, d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} e^{-x}\, d\lambda(x) = e^{-1} - e^{-n} \to_{n\to\infty} e^{-1} < \infty\,.$$

La fonction h_1 est donc intégrable. L'intégrabilité de h_a lorsque $a > 0$ se montre de la même façon, ou bien peut se déduire de l'intégrabilité de h_1 en utilisant les propriétés d'invariance de l'intégrale de Lebesgue (proposition 3.25). Cette méthode a l'avantage de fournir également la valeur de l'intégrale.

Mais on peut aussi raisonner par comparaison (comme dans la seconde méthode du point 3. ci-dessus) et utiliser le fait que, pour tout réel $b \in \mathbb{R}$ et puisqu'on a supposé $a > 0$, on a $x^b e^{-ax} \to 0$ lorsque $x \to \infty$.

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons en un premier temps $a \leq 0$. La fonction définie par $k_{a,b} : x \in [0,+\infty[\mapsto e^{-ax^b} \in [0,+\infty[$ est alors minorée par 1, donc n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$. Nous supposons donc désormais $a > 0$.

Supposons $b \leq 0$. On a alors $x^b \to 0$ lorsque $x \to \infty$ et la fonction $k_{a,b}$ a pour limite 1 en ∞. Si l'on choisit $A > 0$ assez grand, on aura donc $k_{a,b}(x) \geq 1/2$ lorsque $x \geq A$. La fonction $k_{a,b}$ n'est donc pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

Supposons maintenant $b > 0$. La fonction $u : x \mapsto x^2 e^{-ax^b}$ tend alors vers 0 à l'infini (passer au logarithme : voir si besoin la proposition 3.33). Cette fonction u étant continue sur $[0,+\infty[$, il résulte de la proposition 3.32 qu'elle y est bornée, mettons par M. On a donc $0 \leq k_{a,b} \leq Mx^{-2}$ pour tout $x \geq 0$. La fonction $k_{a,b}$ est donc intégrable sur $[1,+\infty[$. Puisque $k_{a,b}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (rappelons que $b > 0$), elle est également intégrable sur $[0,1]$. □

Remarque 3.31 Fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, ou d'un point.

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue. La fonction étant continue elle est bornée sur tout segment inclus dans son domaine de définition. Elle est donc intégrable sur un tel segment.

On dit que f est "intégrable au voisinage de $+\infty$" lorsqu'il existe $A > 0$ tel que f soit intégrable sur l'intervalle $[A,+\infty[$. Dans ce cas, f est intégrable sur tout intervalle $[B,+\infty[$ lorsque $B > 0$ (si $B \geq A$ c'est immédiat par restriction ; si $B < A$ cela résulte de ce que f est intégrable sur $[B, A]$).

On dit de même que f est "intégrable au voisinage de 0" lorsqu'il existe $A > 0$ tel que f soit intégrable sur l'intervalle $]0, A]$. Dans ce cas, f est intégrable sur tout intervalle $]0, B]$ lorsque $B > 0$ (si $B \leq A$ c'est immédiat par restriction ; si $B > A$ cela résulte de ce que f est intégrable sur $[A, B]$).

Bien sûr, tout ce qui précède se transpose à une fonction continue définie sur un intervalle ouvert $]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$. On parle alors d'intégrabilité de f au voisinage de α ou bien au voisinage de β.

Les premières propriétés de la proposition 3.29 peuvent donc être réénoncées comme suit. La fonction $x \to x^a$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $a > -1$, et elle est intégrable au voisinage de l'infini si et seulement si $a < -1$. La fonction $x \to \ln x$ est intégrable au voisinage de 0.

Nous nous servirons de façon récurrente des deux propositions suivantes lorsque nous aurons à montrer qu'une fonction est (ou non) intégrable.

Proposition 3.32 Fonctions bornées. *Soient $a \leq b$ des réels.*

1. *Une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie sur un segment est bornée sur ce segment.*
2. *Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui admet des limites finies en $\pm\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}$.*
3. *Une fonction continue $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui admet une limite finie en $+\infty$ est bornée sur $[a, +\infty[$.*

Les deux premières assertions de la proposition 3.32 ne sont autres que les corollaires 1.48 et 1.49. La dernière assertion en est une variante.

Pour traiter des exemples, comme dans la preuve de la proposition 3.29, il sera indispensable de savoir comparer entre elles des fonctions classiques (en particulier fonctions puissances et exponentielles).

Proposition 3.33 Comparaison de fonctions et conséquences.

1. (a) *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, la fonction $x \mapsto x^a e^{-\beta x}$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.*
   (b) *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, la fonction $x \mapsto x^a e^{-bx}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.*
2. (a) *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\beta < 0$, la fonction $x \mapsto (\ln(x))^a x^\beta$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.*
   (b) *Soit $A > 1$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b < -1$, la fonction $x \mapsto (\ln x))^a x^b$ est intégrable sur $[A, +\infty[$.*

Preuve 1.(a) Passer au logarithme.

1.(b) La fonction $x \mapsto x^a e^{-bx/2}$ est continue sur $[1, \infty[$ et elle tend vers 0 à l'infini. La proposition 3.32 assure donc que cette fonction est bornée, mettons par M, sur l'intervalle $[1, \infty[$.

On a donc $x^a e^{-bx} \leq M e^{-bx/2}$ pour tout $x \geq 1$, et par comparaison avec la fonction $x \mapsto M e^{-bx/2}$ qui est intégrable sur $[1, \infty[$, il suit que $x \mapsto x^a e^{-bx}$ est intégrable $[1, \infty[$ et donc au voisinage de $+\infty$.

2. (a) Puisque $\ln x \to \infty$ lorsque $x \to \infty$, il suffit de prouver l'assertion lorsque $a > 0$. On écrit alors $(\ln(x))^a x^b = (\ln(x) x^{b/a})^a$, avec $\ln(x) x^{b/a} \to 0$ lorsque $x \to \infty$ puisque $b/a < 0$.

2.(b) On choisit $b < \beta < -1$, et l'on écrit $(\ln(x))^a x^b = (\ln(x))^a x^{b-\beta}) x^\beta$. Le facteur $(\ln(x))^a x^{b-\beta})$ est continu sur $[A, \infty[$ et tend vers 0 à l'infini, donc est borné sur cet intervalle. La fonction $x \mapsto x^\beta$est intégrable sur $[A, \infty[$. Le produit est donc intégrable sur cet intervalle. $\square$

Quelques erreurs à ne pas commettre :

On intègre par parties uniquement lorsqu'il s'agit d'intégrer une fonction continue sur un segment.
En particulier, on n'intègre pas par parties sur un intervalle ouvert, ou non borné.

Lorsqu'une fonction f est à valeurs positives, on démontre qu'elle est intégrable en calculant (ou en estimant) son intégrale $\int f\, d\lambda$, qui doit être finie c'est-à-dire à valeurs dans $[0, +\infty[$ et non $[0, +\infty]$.

Par contre, si l'on n'a pas encore montré que la fonction f (non positive), à valeurs réelles ou complexes, est intégrable il ne faut pas écrire $\int f\, d\lambda$ car cette quantité n'est a priori pas définie.

Si vous êtes familiers avec la notion de fonctions équivalentes, vous pourrez également utiliser les résultats suivants... à condition évidemment de bien vérifier que les fonctions sont équivalentes et de citer correctement le résultat.

Fonctions équivalentes.

• Deux fonctions continues $f, g :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ sont dites équivalentes au voisinage de l'infini lorsqu'il existe $A > 0$ tel que ni f ni g ne s'annulent sur l'intervalle $[A, +\infty[$, et si de plus $f(x)/g(x) \to 1$ lorsque $x \to +\infty$.

Dans ce cas, f est intégrable au voisinage de l'infini (remarque 3.31) si et seulement si g l'est.

Par exemple, les fonctions $x \mapsto 1/x$ et $x \mapsto 1/(x+1)$ sont équivalentes au voisinage de l'infini. Ni l'une ni l'autre n'est intégrable au voisinage de l'infini.

• De même f et g sont équivalentes au voisinage de 0 lorsqu'il existe $A > 0$ tel que ni f ni g ne s'annulent sur l'intervalle $]0, A]$, et si de plus $f(x)/g(x) \to 1$ lorsque $x \to 0$.

Dans ce cas, f est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si g l'est.

Par exemple, les fonctions $x \mapsto e^x/\sqrt{x}$ et $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ sont équivalentes au voisinage de 0. Elles sont toutes deux intégrables au voisinage de 0.

H Petit rappel sur les séries réelles et complexes

Définition 3.34 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles ou complexes. On dit que la série $\sum u_n$ (de terme général u_n) est convergente lorsque la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles, soit*

$$s_p = \sum_{n=0}^{p} u_n\,,$$

est convergente. Dans ce cas, on définit la somme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ de la série comme étant la limite de la suite des sommes partielles, soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{p} u_n\,.$$

Proposition 3.35 Séries à termes positifs
Une série de terme général positif (soit $u_n \in [0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.

Preuve La série étant de terme général positif, la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est croissante. Cette suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge donc si et seulement si elle est majorée. On a alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{p} u_n = \sup_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{p} u_n\,. \qquad \square$$

Définition 3.36 Séries alternées
Une série $\sum u_n$, dont le terme général est réel, est dite alternée lorsqu'elle s'écrit $u_n = (-1)^n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ou bien $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle positive décroissant vers 0. On a alors $v_n = |u_n|$.

Proposition 3.37 Séries alternées *Une série alternée est convergente.*

Preuve Supposons pour fixer les idées que $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On vérifie alors facilement que

1. la suite $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles paires est décroissante, et elle est minorée par s_1 : elle converge donc vers un réel a ;
2. la suite $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles impaires est croissante, et majorée par s_0 : elle converge donc vers un réel b ;
3. la différence $s_{2n+2} - s_{2n+1} = u_{2n+1}$ tend vers 0, donc $a = b$.

La série est donc convergente, de somme $a = b$. $\square$

Remarquons la propriété suivante, dont la démonstration est laissée au lecteur.

Lemme 3.38 *Soit $\sum u_n$ une série alternée. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a la majoration $|s_p| \leq |u_0|$.*

Définition 3.39 Séries absolument convergentes

Une série $\sum u_n$ à terme général réel ou complexe est absolument convergente lorsque la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 3.40 Séries absolument convergentes

Une série $\sum u_n$ à terme général réel ou complexe, et qui est absolument convergente, est convergente.

Preuve Supposons, pour simplifier l'exposition, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs réelles. Introduisons les deux suites $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ (partie positive de (u_n)) et $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ (partie négative de (u_n)) respectivement définies pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n^+ = \sup(u_n, 0) \quad \text{et} \quad u_n^- = \sup(-u_n, 0)\,.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$.

Par hypothèse, la série à terme général positif $\sum |u_n|$ est convergente. Il suit des majorations $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ et $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$ que les deux séries à terme général positif $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont également convergentes, de sommes respectives s_+ et s_-. On vérifie alors facilement que la série $\sum u_n$ est convergente, de somme $s_+ - s_-$. En effet, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(s_+ - s_-) - \sum_0^p u_n &= (s_+ - s_-) - \sum_0^p (u_n^+ - u_n^-) \\
&= \big(s_+ - \sum_0^p u_n^+\big) - \big(s_- - \sum_0^p u_n^-\big) \\
&\to 0 \quad \text{lorsque } p \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.41 Noter l'analogie criante entre les séries (à termes positifs, resp. absolument convergentes) et les intégrales (de fonctions positives, resp. Lebesgue intégrables). Voir également le paragraphe 9.E.

• Une série à termes positifs correspond à une fonction mesurable positive. La série à termes positif converge si sa somme (qui est toujours définie) est finie. La fonction mesurable positive est intégrable si son intégrale (qui est toujours définie) est finie.

• Une série à valeurs réelles correspond à une fonction mesurable à valeurs réelles. La série converge absolument si la série des valeurs absolues (série positive) est convergente, et sa somme est alors la différence des sommes de ses parties positive et négative. La fonction mesurable est intégrale si sa valeur absolue (fonction mesurable positive) est intégrable, et son intégrale est alors la différence des intégrales de ses parties positive et négative.

Exercice 3.42 Ecrire la démonstration de la proposition 3.40 dans le cas d'une série $\sum u_n$ de terme général complexe.

Remarque 3.43 Il existe cependant des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes. Par exemple, la série harmonique alternée de terme général $u_n = (-1)^n/n$ lorsque $n \geq 1$ n'est pas absolument convergente.

Elles correspondent, avec tous les ennuis qui vont avec, aux "intégrales semi-convergentes" dont nous ne voulons surtout pas parler ici car elles sortent du cadre de l'intégrale de Lebesgue !

4. Les théorèmes de Lebesgue

Nous démontrons dans ce chapitre les théorèmes fondamentaux de la théorie.

Il s'agit tout d'abord du théorème de convergence dominée de Lebesgue 4.25, qui suit facilement du théorème de convergence monotone.

Nous en déduisons les théorèmes de continuité 4.29 et de dérivabilité 4.34 des intégrales à paramètre.

Ce sont tous ces résultats qui, de par leur puissance et leur facilité d'utilisation, font le succès de l'intégrale de Lebesgue. Ils n'attendent plus qu'à être illustrés en T.D !

— La notion de partie négligeable 4.11
et de propriété vraie presque partout 4.18.

— Les propriétés 4.14, 4.20, 4.22 et leurs démonstrations.

— Le théorème de convergence dominée 4.25, sans démonstration.

— Le corollaire 4.5, et sa preuve.

— Le théorème 4.29 de continuité sous l'intégrale, et sa démonstration.

— Le théorème 4.34 de dérivabilité sous l'intégrale, sans démonstration.

A Le théorème de convergence dominée

> Rappelons que l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives satisfait le théorème de convergence monotone (2.4).
>
> Du théorème de convergence monotone, nous allons maintenant déduire le théorème de convergence dominée pour les fonctions intégrables de signe quelconque ou, plus généralement, à valeurs complexes.

Dans ce paragraphe, nous énonçons une première version un petit peu simplifiée (et donc rassurante) de ce théorème, car elle ne fait pas intervenir la notion de partie négligeable. Le "vrai" théorème de convergence dominée 4.25 s'en déduira immédiatement et sans douleur.

Théorème 4.1 Théorème de convergence dominée (première version). *Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. Soit $f_n : B \to \mathbb{C}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions mesurables. On suppose qu'il y a :*

- **convergence :** *la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : B \to \mathbb{C}$, soit $f = \lim_{n\to\infty} f_n$;*
- **domination :** *il existe une fonction positive $g : B \to [0, +\infty]$ intégrable telle qu'on ait la domination $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in B$.*

Alors chacune des fonctions f_n, ainsi que la limite f, est une fonction intégrable et on peut échanger limite et intégrale :

$$\int_B f \, d\lambda := \int_B (\lim_{n\to\infty} f_n) \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_B f_n \, d\lambda \Big) .$$

Mieux, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_B |f - f_n| \, d\lambda = 0 .$$

Remarque 4.2 L'hypothèse de domination ci-dessus équivaut à supposer que la fonction mesurable positive $h := \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ est intégrable.

En effet, on a $|f_n| \leq h$ pour tout entier n. Si h est intégrable, on peut donc choisir $g = h$ pour dominer les f_n. Réciproquement, si une fonction intégrable positive g domine toutes les f_n, on a $|f_n| \leq g$ pour tout n et donc la fonction mesurable positive $h := \sup |f_n| \leq g$ est également intégrable.

Cependant, dans la pratique, il ne sera pas toujours facile de déterminer la fonction $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$. Nous serons alors amenés à majorer plus largement la famille de fonctions $(|f_n|, n \in \mathbb{N})$. Il faudra bien vérifier que le majorant choisi est intégrable pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée !

Preuve du théorème 4.1 La fonction f est mesurable, comme limite de la suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La domination $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ passe à la limite quand $n \to \infty$ pour donner $|f| \leq g$. Puisque g est intégrable, chacune des fonctions f_n ainsi que la limite f sont donc intégrables (proposition 3.11).

Introduisons la suite de fonctions mesurables positives définies par $h_n := \sup_{k \geq n} |f - f_k|$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge simplement vers 0. Elle satisfait l'encadrement $0 \leq h_n \leq 2g$. La suite des intégrales $I_n = \int h_n \, d\lambda$ est décroissante et positive, elle admet donc une limite. En un premier temps, nous allons voir que $\lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\lambda = 0$. Nous en déduirons ensuite facilement le théorème.

La suite de fonctions $(2g - h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives, qui converge simplement vers $2g$. Appliquons lui le théorème de convergence monotone ! Il vient

$$\lim_{n\to\infty} \int_B (2g - h_n) \, d\lambda = \int_B 2g \, d\lambda \, .$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} \int_B h_n \, d\lambda = 0$ comme annoncé.

Par définition de h_n, on a $0 \leq |f - f_n| \leq h_n$, donc la monotonie de l'intégrale assure que $\lim_{n\to\infty} \int_B |f - f_n| \, d\lambda = 0$. La linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_B f \, d\lambda - \int_B f_n \, d\lambda \right| = \left| \int_B (f - f_n) \, d\lambda \right| \leq \int_B |f - f_n| \, d\lambda$$

nous donnent enfin la convergence des intégrales $\int_B f_n \, d\lambda \to \int_B f \, d\lambda$ lorsque $n \to \infty$. □

Remarque 4.3 Le lecteur attentif se sera rendu compte que cette preuve ressemble à celle du lemme de Fatou. De fait, le théorème de convergence dominée peut se démontrer directement en appliquant le lemme de Fatou (version complète 2.23) à la suite de fonctions positives $2g - |f - f_n|$. Nous avons préféré nous passer de la notion de limite inférieure (elle est cachée sous le tapis) et écrire une preuve qui ne fait appel qu'au théorème de convergence monotone.

Remarque 4.4 La difficulté, lorsqu'on cherche à appliquer ce théorème, est de vérifier la convergence de la suite mais, surtout, de trouver une fonction g "qui domine" (c'est-à-dire qui majore) toutes les fonctions f_n de la suite, et qui est intégrable (d'où l'importance de connaître notamment les résultats de la section 3.G : fonctions de référence, et comparaison de fonctions).

On peut maintenant généraliser le résultat de la proposition 3.19 à des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non monotones.

Corollaire 4.5 *Soient* $]a,b[\ \subset \mathbb{R}$ *un intervalle (borné, ou non borné) et* $f \in \mathcal{L}^1(]a,b[)$ *une fonction intégrable sur cet intervalle.*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de réels tels que* $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. On suppose que* $a_n \to a$ *et* $b_n \to b$ *lorsque* $n \to \infty$*. Alors on a l'égalité*

$$\int_{]a,b[} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{]a_n,b_n[} f\, d\lambda\,.$$

Autrement dit, on a

$$\int_{]a,b[} f\, d\lambda = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \int_{]x,y[} f\, d\lambda\,.$$

Pour mémoire, rappelons lorsque f est définie sur l'intervalle fermé $[a,b]$, l'égalité $\int_{]a,b[} f\, d\lambda = \int_{[a,b]} f\, d\lambda$: il n'y a donc pas à s'inquiéter de savoir si on intègre sur des intervalles fermés ou ouverts (proposition 3.11).

Preuve On introduit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = f\mathbb{1}_{]a_n,b_n[}$. Cette suite converge simplement vers f, et elle est dominée par f, supposée intégrable. Le résultat annoncé est donc conséquence du théorème de convergence dominée. □

Exercice 4.6 Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. On introduit, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \leq n\}$ et la fonction tronquée $f_n := f\,\mathbb{1}_{A_n}$.

1. On suppose dans un premier temps que f est à valeurs positives.
   Le théorème de convergence monotone s'applique-t-il à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Si oui, que dit-il ?
2. On revient à $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Montrer que $\int f_n\, d\lambda \to \int f\, d\lambda$.

Exercice 4.7 On introduit les suites de fonctions mesurables respectivement définies par $f_n = \mathbb{1}_{[n,\infty[}$, $g_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$, $h_n = \mathbb{1}_{[0,1/n]}$, $j_n : x \to (1/x)\,\mathbb{1}_{]0,1/n]}(x)$, $k_n : x \to (1/\sqrt{x})\,\mathbb{1}_{]0,1/n]}(x)$ ou encore $\ell_n = n\,\mathbb{1}_{]0,1/n^2]}$ $(n \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que chaque suite converge simplement, et déterminer sa limite.
2. Décider, pour chacune de ces suites, si le théorème de convergence dominée s'applique.

Exercice 4.8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors, pour toutes suites de réels $x_n \to -\infty$ et $y_n \to +\infty$, on a

$$\int f\, d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{[x_n,y_n]} f\, d\lambda\,.$$

Autrement dit, on a

$$\int f\, d\lambda = \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to+\infty}} \int_{[x,y]} f\, d\lambda\,.$$

Exercice 4.9 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n$ lorsque $0 \leq t < n$ et $f_n(t) = 0$ sinon.

1. En utilisant la fonction logarithme, montrer que $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$ pour tous $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que chaque fonction f_n est intégrable.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda$.

Revenons maintenant sur l'exercice 3.12, que nous avions traité de façon très élémentaire. Dans l'exercice suivant, on retrouve ce résultat en utilisant le théorème de convergence dominée : le théorème s'applique très facilement sur cet exemple, mais rappelons nous ce qu'il nous a coûté pour le démontrer ! Moralité : lorsque l'on peut faire les choses facilement "à la main", autant se passer d'utiliser un gros théorème...

Exercice 4.10 Retrouver le résultat de l'exercice 3.12 (1) en utilisant théorème de convergence dominée.

B Parties négligeables

On introduit ici la notion de partie négligeable. Ce sont des parties si petites que si l'on modifie une fonction sur un ensemble négligeable, cela ne changera pas la valeur de son intégrale. Cette notion joue un rôle capital dans la théorie de Lebesgue.

Définition 4.11 Partie négligeable.

On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est négligeable lorsque sa fonction indicatrice est mesurable et d'intégrale nulle, soit $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \, d\lambda = 0$.

Il faut penser qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est négligeable lorsqu'elle est de "longueur" nulle. Mais pour définir la "longueur" d'une partie de $\mathbb{R}$ qui est un peu compliquée, c'est toute une histoire.

Nous verrons en effet au chapitre 9 que, pour définir ce qu'est une fonction mesurable puis son intégrale, il faut tout d'abord définir ce que sont les parties mesurables et leurs mesures. Ces notions seront liées par la propriété suivante.

Propriété 4.12 Mesure d'une partie mesurable.

Une partie A de $\mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est une fonction mesurable.

Dans ce cas, la mesure de A vérifie $\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \, d\lambda$.

Les définitions précises de parties et de fonctions mesurables seront données en 9.3 et en 9.22. Cela dit, toutes les parties de $\mathbb{R}$ que vous pourrez imaginer seront mesurables (revoir si besoin le paragraphe 3.A).

On peut alors donner une définition équivalente des parties négligeables.

Définition 4.13 Partie négligeable (bis). *Une partie mesurable A est négligeable lorsqu'elle est de mesure nulle, soit $\lambda(A) = 0$.*

Une propriété fondamentale des parties négligeables est leur stabilité par unions dénombrables.

Lemme 4.14 Union de négligeables.
Une union finie ou dénombrable de parties négligeables est négligeable.

Preuve Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties négligeables de $\mathbb{R}$. On veut montrer que la réunion $A := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est également négligeable.

Cette propriété est une conséquence immédiate de l'un des axiomes qui interviennent dans la définition des mesures 9.10 (σ-additivité).

Cependant, une fois traduit en termes d'intégrales (propriété 4.12), on la retrouve comme cas particulier du corollaire 2.14, en prenant $u_n = \mathbb{1}_{A_n}$. En effet, puisque les parties A_n sont négligeables, les fonctions mesurables positives u_n sont toutes d'intégrale nulle, donc leur somme $u := \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est également d'intégrale nulle. Puisque $\mathbb{1}_A \leq u$, la croissance de l'intégrale assure que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est d'intégrale nulle, c'est-à-dire que A est négligeable. □

Exemple 4.15 Un singleton est négligeable. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable donc négligeable.

Par contre une union quelconque de parties négligeables ne l'est plus forcément. Chaque singleton dans $\mathbb{R}$ est négligeable, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas !

Un sous-ensemble (mesurable) d'une partie négligeable est encore une partie négligeable.

Un intervalle non réduit à un point n'est pas négligeable.

Il existe des parties négligeables de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dénombrables.

Lemme 4.16 *L'intersection décroissante d'une suite de compacts non vides $K_n \subset \mathbb{R}$ est un compact non vide.*

Preuve Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts, c'est-à-dire avec $K_{n+1} \subset K_n \subset \mathbb{R}$. On suppose que chacun de ces compacts est non vide, et on veut montrer que $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$.

On choisit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un élément $x_n \in K_n$. La suite de compacts étant décroissante, on a $x_p \in K_n$ pour tout $p \geq n$.

La suite (x_n) vivant dans le compact K_0, elle possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\alpha \in K_0$. Mieux, puisqu'à partir du rang n on a

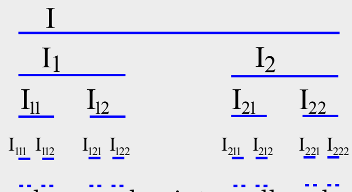
$x_p \in K_n$, on observe que $\alpha \in K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc que $\alpha \in K$. Ceci assure que K est non vide.

Pour montrer que K est compact, on considère une suite (z_n) d'éléments de K. Puisque $K \subset K_0$ avec K_0 compact K_0, la suite (z_n) possède une suite extraite $(z_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\alpha \in K_0$. Cette suite extraite $(z_{\varphi(n)})$ est également à valeurs dans le compact K_p pour tout $p \in \mathbb{N}$ (car à valeurs dans K), ce qui assure que $\alpha \in K_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et donc finalement que $\alpha \in K$.

Exemple 4.17 L'ensemble triadique de Cantor.

On part du compact $K_0 = [0, 1]$. On construit alors le compact $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ en ôtant le tiers médian de l'intervalle K_0.

On réitère la construction, de sorte que le compact K_n $(n \geq 1)$ est constitué de 2^n intervalles disjoints, chacun de longueur $(1/3)^n$, qu'on appelle les intervalles de n-ième génération.



Le compact K_{n+1} est obtenu en ôtant, de chacun des intervalles de n-ième génération, son tiers médian. Le Cantor 1/3 est alors défini comme l'intersection $C = \cap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Comme intersection décroissante de compacts non vides, c'est un compact non vide.

De plus, puisque $\int \mathbb{1}_{K_n}\, d\lambda = (2/3)^n$ pour tout $n \geq 0$, il vient que $\int \mathbb{1}_C\, d\lambda \leq (2/3)^n$ pour tout $n \geq 0$, et donc que C est négligeable.

Il reste à voir que C n'est pas dénombrable. Pour cela, apposons des étiquettes sur les intervalles de n-ième génération, comme sur le dessin. Les intervalles de n-ième génération sont alors en bijection avec l'ensemble $\{1, 2\}^n$.

En utilisant le lemme 4.16, on montre alors que C est en bijection avec le produit infini $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ (se donner un point de C, c'est en effet prendre l'intersection d'une suite décroissante d'intervalles $(J_0, J_1, \ldots, J_n \ldots)$ où J_n est un intervalle de n-ième génération. Le procédé diagonal évoqué à la proposition 1.57 permet de montrer que ce produit infini $\{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

Définition 4.18 Propriété vraie presque partout.

On dira qu'une propriété est vérifiée presque partout (p.p.) si elle est vraie en dehors d'un ensemble négligeable.

Exemple 4.19 Une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est nulle p.p. lorsque l'ensemble (mesurable) $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ est négligeable.

Deux fonctions mesurables $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont égales p.p. lorsque l'ensemble (mesurable) $B := \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq g(x)\}$ est négligeable.

Enonçons deux propriétés élémentaires faisant intervenir cette notion.

Proposition 4.20 *Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.*

1. *Si l'intégrale de f est finie, alors f prend des valeurs finies p.p.*
2. *L'intégrale de f est nulle si et seulement si $f = 0$ p.p.*

Preuve 1. Introduisons l'ensemble $B := \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) = \infty\}$. C'est une partie mesurable de $\mathbb{R}$. Soit $g = \infty\, \mathbb{1}_B$ la fonction mesurable qui vaut $+\infty$ sur B et qui est nulle hors de B. Par construction on a $g \leq f$, d'ou

$$\infty \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda < \infty$$

par croissance de l'intégrale. Il suit que B est négligeable.
2. Introduisons $A := \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 0\}$. C'est une partie mesurable de $\mathbb{R}$.

• Supposons pour commencer que f est nulle presque partout, c'est-à-dire que A est négligeable. On a alors par croissance de l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} \infty\, \mathbb{1}_A \, d\lambda = \infty \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \, d\lambda = \infty\, 0 = 0\,.$$

• Réciproquement, si l'intégrale de f est nulle, chaque ensemble

$$A_n := \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \geq 1/n\}$$

est négligeable puisque $(1/n) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_n} \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = 0$, et donc $A = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ est également négligeable d'après le lemme 4.14. □

Remarque 4.21 La réciproque de l'assertion 1. dans 4.20 est évidemment fausse. Par exemple, la fonction $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ constante égale à 1 est finie en tout point, mais son intégrale vaut $+\infty$!

On va maintenant voir qu'il suffit de connaître une fonction presque partout pour connaître son intégrale.

Proposition 4.22 *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables.*
On suppose que $f = g$ p.p. Alors f est intégrable si et seulement si g l'est. Dans ce cas, leurs intégrales $\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda$ sont égales.

Preuve Si f et g coïncident en dehors de l'ensemble négligeable N, on a

$$\big|\, |f| - |g| \,\big| \leq |f - g| \leq \infty\, \mathbb{1}_N\,.$$

Puisque N est négligeable, la fonction $\infty\, \mathbb{1}_N$ est intégrable, d'intégrale nulle. Par monotonie de l'intégrale, il suit que $\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |g| \, d\lambda$ donc f est intégrable si et seulement si g l'est. Dans ce cas, l'inégalité triangulaire assure que $0 \leq |\int_{\mathbb{R}} (f - g) \, d\lambda| \leq \int_{\mathbb{R}} |f - g| \, d\lambda \leq 0$, d'où le résultat. □

Exercice 4.23 1. Soient $f_i, g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ des fonctions mesurables ($i = 1, 2$) telles que $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p.
Montrer que $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ p.p. et $f_1 g_1 = f_2 g_2$ p.p.

2. Soit $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$. Montrer que f est également intégrable sur chacun des intervalles $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$, et qu'on a les égalités

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_{[a,b[} f\, d\lambda = \int_{]a,b]} f\, d\lambda = \int_{]a,b[} f\, d\lambda\,.$$

Exercice 4.24 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues. On suppose que $f = g$ p.p. Démontrer que $f = g$. (Voir également l'exercice 8.5).

Nous sommes maintenant prêts à énoncer la forme définitive du théorème de convergence dominée. Dans ce nouvel énoncé, plus général, les hypothèses de convergence et de domination sont seulement valables presque partout.

Théorème 4.25 Théorème de convergence dominée.
Soit $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable. Soit $f_n : B \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose qu'il existe un ensemble négligeable $N \subset B$ tel que :

- **convergence :** *la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : B \to \mathbb{C}$ en tout point de $B \setminus N$;*
- **domination :** *il existe une fonction positive $g : B \to [0, +\infty]$ intégrable telle qu'on ait la domination $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in B \setminus N$.*

Alors chacune des fonctions f_n, ainsi que la limite f, est une fonction intégrable, et

$$\int_B f\, d\lambda = \int_B (\lim_{n\to\infty} f_n)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_B f_n\, d\lambda \Big)\,.$$

Mieux, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_B |f_n - f|\, d\lambda = 0\,.$$

Définition 4.26 Domination.
Soient $f : B \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur B mesurable, et $g : B \to [0, +\infty]$ une fonction intégrable. On dit que g domine f si $|f| \leq g$ p.p.

Preuve du théorème de convergence dominée. On se ramène sans effort à la première version du théorème de convergence dominée, en constatant qu'on peut simplement oublier ce qui se passe sur l'ensemble négligeable N !

Introduisons en effet les fonctions tronquées $\tilde{f} := f\, \mathbb{1}_{^cN}$ (qui vaut 0 sur N et est égale à f sur le complémentaire ${}^cN$), et $\tilde{f}_n := f_n\, \mathbb{1}_{^cN}$ ($n \in \mathbb{N}$). Ce sont encore des fonctions mesurables et on a pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}_n = f_n$ p.p. et $\tilde{f} = f$ p.p.

La suite $(\tilde{f}_n)$ satisfait maintenant les hypothèses du théorème 4.1 : elle converge partout vers $\tilde{f}$, et est dominée en chaque point et pour tout n par la fonction intégrable g. On a donc

$$\int_B \tilde{f}_n \, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_B \tilde{f} \, d\lambda \,.$$

Puisque $\int_B \tilde{f}_n \, d\lambda = \int_B f_n \, d\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\int_B \tilde{f} \, d\lambda = \int_B f \, d\lambda$, il vient comme annoncé

$$\int_B f_n \ d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_B f \ d\lambda \,.$$

□

Remarque 4.27 Vous pourrez également voir les hypothèses du théorème de convergence dominée formulées comme suit dans la littérature.

Théorème *Soient $B \subset \mathbb{R}$ mesurable, et $f_n : B \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que l'on a :*

- **convergence p.p. :** *la suite (f_n) converge p.p. vers une fonction $f : B \to \mathbb{C}$;*
- **domination :** *il existe une fonction positive intégrable $g : B \to [0, +\infty]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait la domination $|f_n| \le g$ p.p.*

Alors, on a les conclusions du théorème 4.25.

Examinons cette nouvelle formulation.

L'hypothèse de convergence p.p. signifie qu'il existe une partie négligeable $A \subset B$ telle que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in B \setminus A$.

L'hypothèse de domination énoncée ici signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une partie négligeable A_n tel que $|f_n(x)| \le g(x)$ pour tout $x \in B \setminus A_n$.

Observons alors que $N := A \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, comme union dénombrable de parties négligeables, est une partie négligeable de B et que les hypothèses du théorème 4.25 sont satisfaites pour cette partie N. Ce nouvel énoncé est donc équivalent à celui de 4.25.

Exercice 4.28 Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x| < 1$ par $f_n(x) = (\sin(\frac{1}{x}))^n$, et par $f_n(x) = 0$ sinon

1. Montrer que chacune des fonctions f_n (pour $n \in \mathbb{N}$) est intégrable.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 en dehors d'un ensemble négligeable $N \subset \mathbb{R}$ que l'on explicitera.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $n \to \infty$, et identifier sa limite.

C Intégrales dépendant d'un paramètre

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée pour étudier les intégrales dépendant d'un paramètre.

Théorème 4.29 Continuité sous l'intégrale.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $h : I \times B \to \mathbb{C}$ une fonction, où $B \subset \mathbb{R}$ est une partie mesurable de $\mathbb{R}$. On suppose que :

1. *pour tout $x \in I$, la fonction $t \in B \mapsto h(x,t) \in \mathbb{C}$ est intégrable ;*
2. *pour tout $t \in B$, la fonction $x \in I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{C}$ est continue ;*
3. *il existe une fonction positive intégrable $g \in \mathcal{L}^1(B)$ telle qu'on ait la domination $|h(x,t)| \leq g(t)$ pour tout $x \in I$ et tout $t \in B$.*

Alors, la fonction $H : x \in I \mapsto \int_B h(x,t)\, d\lambda(t) \in \mathbb{C}$ est bien définie, et elle est continue.

Remarque 4.30 Dans la pratique, $B \subset \mathbb{R}$ sera bien souvent un intervalle !

La première hypothèse est conséquence de la troisième.

Preuve Pour tout $x \in I$, la fonction définie par $t \in B \mapsto h(x,t) \in \mathbb{C}$ est intégrable (hypothèse 1.). La fonction H est donc bien définie.

Nous allons montrer que H est continue au point x_0 en utilisant le critère séquentiel de continuité 1.43. On se donne donc une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans I qui converge vers x_0, et l'on veut montrer que la suite $(H(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $H(x_0)$. Cette propriété résulte immédiatement du théorème de convergence dominée 4.25 que l'on applique à la suite de fonctions définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \in B \mapsto h(y_n, t) \in \mathbb{C}$. En effet, on a :

- **convergence :** On introduit la fonction $f : t \in B \mapsto h(x_0, t) \in \mathbb{C}$. D'après l'hypothèse 2., la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f en tout point $t \in B$.
- **domination :** L'hypothèse 3. assure qu'on a $|f_n(t)| \leq g(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in B$, avec g intégrable positive.

Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant satisfaites, on a $H(y_n) := \int_B f_n\, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_B f\, d\lambda =: H(x_0)$: ce qu'on voulait. □

Le corollaire suivant se déduit sans peine du théorème 4.29 : il suffit en effet d'oublier la partie négligeable N, et donc d'intégrer uniquement sur $B' = B \setminus N$. On laisse au lecteur le soin d'écrire les détails si besoin.

Corollaire 4.31 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $h : I \times B \to \mathbb{C}$ une fonction, où $B \subset \mathbb{R}$ est une partie mesurable de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On suppose qu'il existe un ensemble négligeable $N \subset B$ tel que :*

1. *pour tout $x \in I$, la fonction $t \in B \mapsto h(x,t) \in \mathbb{C}$ est intégrable ;*
2. *pour tout $t \notin N$, la fonction $x \in I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{C}$ est continue en x_0 ;*
3. *il existe une fonction positive intégrable $g \in \mathcal{L}^1(B)$ telle qu'on ait la domination $|h(x,t)| \leq g(t)$ pour tout $x \in I$ et tout $t \notin N$.*

Alors, la fonction

$$H : x \in I \mapsto \int_B h(x,t)\, d\lambda(t) \in \mathbb{C}$$

est bien définie et elle est continue en x_0.

Exercice 4.32 Intégrale fonction de la borne. Soit $f \in \mathcal{L}^1$.

1. Montrer que la fonction $F : x \in [0,\infty[\mapsto \int_{[0,x]} f\, d\lambda \in \mathbb{R}$ est bien définie.
2. Montrer que F est continue sur $[0,\infty[$.
   On écrira F sous forme d'une intégrale dépendant d'un paramètre, soit

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,t)\, d\lambda(t) \quad \text{où} \quad h(x,t) = f(t)\, \mathbb{1}_{[0,x]}(t)\,.$$

Un prochain chapitre sera consacré à la transformée de Fourier. On peut cependant s'y intéresser dès maintenant.

Exercice 4.33 Transformée de Fourier. Soit $f \in \mathcal{L}^1$ une fonction intégrable.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(t)e^{-itx} \in \mathbb{C}$ est intégrable.
2. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}\, d\lambda(t)$ est une fonction continue.

Nous allons maintenant passer au théorème de dérivation sous le signe intégrale. Comme il va s'agir de dériver, on doit maintenant supposer que I est un intervalle ouvert.

Théorème 4.34 Dérivabilité sous l'intégrale.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $B \subset \mathbb{R}$ une partie mesurable et une fonction $h : I \times B \to \mathbb{C}$. On suppose que :

1. *pour tout $x \in I$, la fonction $t \in B \mapsto h(x,t) \in \mathbb{C}$ est intégrable ;*
2. *pour tout $t \in B$, la fonction $x \in I \mapsto h(x,t) \in \mathbb{C}$ est de classe C^1 ;*
3. *il existe une fonction intégrable $g \in \mathcal{L}^1(B)$ telle que, pour tout $x \in I$ et tout $t \in B$, on ait la domination $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$.*

Alors, la fonction

$$H : x \in I \mapsto \int_B h(x,t)\, d\lambda(t) \in \mathbb{C}$$

est bien définie, de classe C^1, et pour tout $x \in I$ on peut calculer sa dérivée :

$$H'(x) = \int_B \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\, d\lambda(t)\,.$$

En d'autres termes, on peut "dériver sous l'intégrale". Il suit que la fonction H est continue.

Exercice 4.35 Utiliser le théorème de dérivation sous l'intégrale pour montrer que la fonction définie par $H : x \in]0, +\infty[\mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-xt^2}\, d\lambda(t) \in \mathbb{R}$ est de classe C^1, et exprimer sa dérivée sous forme d'une intégrale. On commencera par étudier H sur des intervalles $]a, +\infty[$, avec $0 < a$.

Retrouver simplement ce résultat en exprimant H à l'aide de $I_0 = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, d\lambda(t)$ (on utilisera les propriétés d'invariance de l'intégrale).

Preuve L'hypothèse (1) assure que la fonction H est bien définie.

Montrons maintenant la dérivabilité de H. Soit $x_0 \in I$. La fonction H est dérivable au point x_0 avec $H'(x_0) = \alpha$ si et seulement si ses taux d'accroissement au point x_0, soient

$$\tau_H^{x_0}(x) := \frac{H(x_0) - H(x)}{x_0 - x},$$

convergent vers α lorsque $x \to x_0$ (avec $x \in I$ et $x \neq x_0$). Pour montrer que c'est bien le cas, nous allons de nouveau utiliser le théorème de convergence dominée.

On choisit donc une suite $y_n \in I \backslash x_0$ qui converge vers x_0, et l'on introduit cette fois-ci la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n : t \in B \longmapsto \frac{h(x_0, t) - h(y_n, t)}{x_0 - y_n} \in \mathbb{C}.$$

Chaque fonction f_n est intégrable comme combinaison linéaire de fonctions intégrables.

Observons que $f_n(t) = \tau_{h(.,t)}^{x_0}(y_n)$ est le taux d'accroissement entre x_0 et y_n de la fonction $x \mapsto h(x, t)$. Par définition du taux d'accroissement et par linéarité de l'intégrale, on a l'égalité

$$\tau_H^{x_0}(y_n) = \int_B f_n(t)\, d\lambda(t).$$

Convergence : L'hypothèse de dérivabilité (2.) assure que, pour tout $t \in B$, on a $f_n(t) \to \dfrac{\partial h}{\partial x}(x_0, t)$ lorsque $n \to \infty$: les taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto h(x, t)$ convergent vers la dérivée !

Domination : Il s'agit maintenant de dominer les fonctions f_n, c'est-à-dire les taux d'accroissement des fonctions $x \mapsto h(x, t)$ au point x_0. Du théorème des accroissements finis, puis de la majoration 3., on déduit la domination, valable pour tout $t \in B$:

$$|f_n(t)| = \left|\frac{h(x_0, t) - h(y_n, t)}{x_0 - y_n}\right| \leq \sup_{z \in [x_0, y_n]} \left|\frac{\partial h}{\partial x}(z, t)\right| \leq g(t).$$

Puisque la fonction g est intégrable, le théorème de convergence dominée s'applique à la suite (f_n) pour montrer que

$$\tau_H^{x_0}(y_n) = \int_B f_n(t)\, d\lambda(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_B \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t)\, d\lambda(t)\,.$$

Ainsi H est bien dérivable au point x_0, avec $H'(x_0) = \displaystyle\int_B \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t)\, d\lambda(t)$.

Le théorème de continuité sous le signe intégrale s'applique alors pour montrer que la dérivée $x \in I \mapsto H'(x) = \int_B \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\, d\lambda(t)$ est continue, i.e. que H est de classe C^1. En effet, chaque fonction $x \in I \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \in \mathbb{C}$ est continue sur I (pour $t \in B$) et on a la domination (3). □

Remarque 4.36 Si l'on remplace, dans l'énoncé de 4.34, l'hypothèse 2. par

2.' *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *la fonction* $t \in I \mapsto h(t,x) \in \mathbb{R}$ *est dérivable*

le théorème 4.29 assure simplement que H est dérivable.

5. Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Nous commençons par définir l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Puis nous énonçons sans démonstration les théorèmes de Fubini, et de changement de variable pour les intégrales multiples, qui donnent des méthodes pratiques pour le calcul de ces intégrales.

- Les propriétés de l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ des fonctions mesurables positives 5.1 ou bien intégrables 5.3.
- Les théorèmes de convergence monotone, de Fatou, de convergence dominée, de continuité et dérivabilité sous l'intégrale (mêmes énoncés qu'en dimension 1).
- La notion d'ensemble négligeable.
- La définition de l'intégrale d'une fonction définie presque partout 5.8.
- Le théorème de Fubini-Tonelli 5.11
- Le théorème de Fubini 5.17.
- Le théorème du changement de variables pour les intégrales multiples 5.28.
- Les propriétés d'invariance de l'intégrale 5.32 en dimension quelconque.
- Le passage en coordonnées polaires 5.29.

A Intégration dans $\mathbb{R}^n$

A.1 Fonctions positives

Nous admettrons qu'on sait définir, comme en dimension 1, l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions mesurables positives $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$. Elle satisfait les mêmes propriétés qu'en dimension 1, que nous rappelons ci-dessous brièvement. Seule la condition de normalisation doit être modifiée par rapport à l'énoncé 2.4 : on ne prescrit plus la longueur des intervalles, mais la "mesure" (qui sera une "surface" en dimension 2, un "volume" en dimension 3 etc...) des pavés n-dimensionnels.

Théorème 5.1 Intégrale des fonctions positives sur $\mathbb{R}^n$.
Il existe une application qui, à une fonction $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ mesurable positive, associe son "intégrale de Lebesgue"

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \cdots, x_n) \, d\lambda(x_1, \cdots, x_n) \,.$$

Cette intégrale est :

1. **Normalisée :** *pour tout pavé $P := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$, l'intégrale de sa fonction indicatrice vaut $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_P \, d\lambda = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.*
2. **Croissante.**
3. **Positivement linéaire.**

Elle satisfait le théorème de
Convergence monotone : *si $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (c'est-à-dire avec $f_p \le f_{p+1}$) de fonctions mesurables positives $f_p : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$, alors sa limite $f := \lim f_p = \sup f_p : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ est mesurable positive et on peut échanger limite et intégrale :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{p\to+\infty} f_p \, d\lambda = \lim_{p\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_p \, d\lambda \,.$$

Comme en dimension 1, une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ (de même que sa restriction à une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$, par exemple un ouvert ou un fermé de $\mathbb{R}^n$) est mesurable.

A.2 Fonctions à valeurs réelles ou complexes

Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda < \infty$, et l'on définit alors son intégrale en passant par l'intermédiaire de ses parties positives et négative (revoir la définition 3.2), soit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, d\lambda \,.$$

De même pour les fonctions à valeurs complexes, en passant par les parties réelle et imaginaire.

Une fonction mesurable $f : B \to \mathbb{C}$ définie sur une partie mesurable $B \subset \mathbb{R}^n$ est intégrable lorsque son prolongement $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ par 0 est intégrable, et on définit alors $\int_B f\, d\lambda := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\, d\lambda$.

Exemple 5.2 Soient $P := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ un pavé, et $f : P \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f est bornée. Il suit qu'elle est intégrable sur P.

Proposition 5.3 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue (2).

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable. On désignera par $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(B)$, ou plus simplement $\mathcal{L}^1(B)$, l'ensemble des fonctions $f : B \to \mathbb{C}$ qui sont intégrables. On notera en particulier $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1. *L'ensemble $\mathcal{L}^1(B)$ est naturellement un* **espace vectoriel** *sur $\mathbb{C}$.*
2. *L'intégrale $I : f \in \mathcal{L}^1(B) \to \int_B f\, d\lambda \in \mathbb{C}$ est une* **application $\mathbb{C}$-linéaire** *sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}^1$.*
3. *L'intégrale vérifie* **l'inégalité triangulaire** *: pour $f \in \mathcal{L}^1(B)$, on a*

$$\left|\int_B f\, d\lambda\right| \leq \int_B |f|\; d\lambda\,.$$

Preuve Reprendre mot pour mot la démonstration donnée en dimension 1 (propositions 3.6 et 3.9). □

L'intégrale de Lebesgue en dimension n vérifie le théorème de convergence dominée qui se déduit, comme en dimension 1, du théorème de convergence monotone. Énonçons la version sans partie négligeable.

Théorème 5.4 Théorème de convergence dominée.

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ mesurable. Soient $f_p : B \to \mathbb{C}$ ($p \in \mathbb{N}$) des fonctions mesurables. Supposons qu'on ait :

- **convergence :** *la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : B \to \mathbb{C}$ en tout point de B ;*
- **domination :** *il existe une fonction positive $g : B \to [0, +\infty]$ intégrable telle qu'on ait la domination $|f_p(x)| \leq g(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in B$.*

Alors chacune des fonctions f_p, ainsi que la limite f, est intégrable et

$$\int_B f\, d\lambda = \int_B (\lim_{p\to\infty} f_p)\, d\lambda = \lim_{p\to\infty}\Big(\int_B f_p\, d\lambda\Big)\,.$$

Mieux, on a

$$\lim_{p\to\infty} \int_B |f_p - f|\, d\lambda = 0\,.$$

On en déduit, comme avant, les théorèmes de continuité et de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre. Nous vous laissons le soin de les énoncer.

A.3 Parties négligeables dans $\mathbb{R}^n$

Nous commençons par revenir sur la notion de partie négligeable, cette fois-ci dans $\mathbb{R}^n$, et avec quelques nouveaux exemples. La définition est la même...

Définition 5.5 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable.*

On dit que A est négligeable lorsque $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A \, d\lambda = 0$.

Exemple 5.6 Comme en dimension 1, une réunion finie ou dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Un singleton $\{x_0\} \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable. De même, un segment paralèlle à un axe de coordonnées, comme $S_1(a,b) = [a,b] \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$, est négligeable lorsque $n \geq 2$. Dans les deux cas, il s'agit de pavés (avec un ou plusieurs côtés de longueur nulle) !

Une droite de coordonnées, par exemple $D_1 = \{(t, 0, \ldots, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est négligeable lorsque $n \geq 2$. Il suffit d'écrire $D_1 = \cup_{n \in \mathbb{N}} S_1(-n, n)$.

Attention, un segment non réduit à un point n'est pas négligeable dans $\mathbb{R}$!

Pour démontrer qu'un segment quelconque est négligeable dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$, on s'en tire comme suit avec les moyens du bord. Le théorème de Fubini nous permettra bientôt de trivialier le résultat (exercice 5.14).

Exercice 5.7

1. Soit le segment $\sigma = \{(t,t) \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$.
   (a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on peut recouvrir σ par la réunion de p carrés de côtés $1/p$ (faire un dessin !).
   (b) En déduire que σ est négligeable.
2. Montrer de même qu'un segment quelconque $S \subset \mathbb{R}^n$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.
3. En déduire qu'une droite $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ est négligeables dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.

La théorie de l'intégration de Lebesgue nous amène naturellement à intégrer des fonctions qui ne sont définies que presque partout, c'est-à-dire en dehors d'un ensemble négligeable (voir notamment le théorème de Fubini 5.17).

Définition 5.8 *Soit $n \geq 1$. Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable.*

On dira que "la fonction mesurable f est définie presque partout sur B" lorsqu'il existe une partie négligeable $N \subset B$ telle que f soit définie (et mesurable) sur $B \setminus N$.

Lorsque f est à valeurs positives, on définit alors $\int_B f \, d\lambda = \int_{B \setminus N} f \, d\lambda$.

Lorsque f est à valeurs complexes, on dit que la fonction f définie p.p. est intégrable sur B lorsque $\int_{B \setminus N} |f| \, d\lambda < \infty$ et on définit $\int_B f \, d\lambda = \int_{B \setminus N} f \, d\lambda$.

Remarque 5.9 La notation $\int_B f\,d\lambda$ est ici quelque peu abusive, la fonction $f : B \setminus N \to \mathbb{C}$ n'étant pas définie aux points de N. Mais cette notation présente l'avantage de ne pas faire référence à la partie négligeable N, qui ne nous intéressera généralement pas.

Il faut quand même s'assurer que la définition de l'intégrale d'une fonction définie presque partout n'est pas ambigüe. Supposons pour fixer les idées que f, définie presque partout sur B, soit à valeurs positives. La fonction f est donc définie sur $B \setminus N$, où $N \subset B$ est négligeable. Si N_1 est une autre partie négligeable de B, telle que $N \subset N_1$, la fonction f est a fortiori définie sur N_1 et la proposition 4.22 assure que $\int_{B\setminus N} f\,d\lambda = \int_{B\setminus N_1} f\,d\lambda$. Nous formaliserons tout ceci au chapitre 8 où nous introduirons les espaces L^1 puis L^p pour $p \geq 1$.

Voici un exemple très naturel, où apparaît une fonction définie presque partout.

Exemple 5.10 Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f_n(x) = (\cos x)^n$ (pour $n \in \mathbb{N}$). La fonction $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ est définie presque partout (en tous les points tels que $\cos x \neq -1$, c'est-à-dire lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus N$ où N est la partie dénombrable $N = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$).

L'objet des deux paragraphes suivants est de donner des méthodes pour calculer les intégrales n-dimensionnelles.

B Les théorèmes de Fubini

Les théorèmes de Fubini permettent de ramener le calcul d'une intégrale en plusieurs variables à une succession d'intégrales en dimension 1 (pour lesquelles on dispose notamment des méthodes expliquées en 3.18).

Pour simplifier les notations, nous n'exposerons ces résultats qu'en dimension 2. La généralisation à la dimension n est immédiate : pour calculer une intégrale sur $\mathbb{R}^n$, on intègre n fois en dimension 1 en choisissant comme on veut l'ordre dans lequel on fait apparaître les n coordonnées.
On commence (comme toujours !) par traiter le cas des fonctions positives.

Théorème 5.11 Théorème de Fubini-Tonelli.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Alors, les trois expressions suivantes ont un sens et on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,d\lambda(y) \Big)\,d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,d\lambda(x) \Big)\,d\lambda(y)\,. \tag{5.1}$$

Cela signifie implicitement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $f_x : y \in \mathbb{R} \to f(x,y) \in [0,+\infty]$ est mesurable, puis que la fonction définie par $x \in \mathbb{R} \to \int_{\mathbb{R}} f_x \, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, d\lambda(y) \in [0,+\infty]$ est mesurable.

Exercice 5.12 On se donne $A := \{a\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ($a \in \mathbb{R}$) ou, plus généralement, $A = N \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ où $N \subset \mathbb{R}$ est une partie négligeable. Montrer que $A \subset \mathbb{R}^2$ est lui-même négligeable, c'est-à-dire que l'intégrale de sa fonction indicatrice est nulle :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A = 0\,.$$

Exercice 5.13 Soient $n \geq 2$ et $P := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$ un pavé.
Retrouver, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et la normalisation de 2.4, la valeur de l'intégrale de la fonction indicatrice du pavé, soit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_P = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)\,.$$

La normalisation 5.1 est donc bien cohérente avec Fubini-Tonelli, ouf !

Exercice 5.14 Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ une droite. Retrouver le fait que D est négligeable dans $\mathbb{R}^2$ (exercice 5.7), en utilisant cette fois-ci le théorème de Fubini-Tonelli.

Expliquons maintenant sur un exemple comment intégrer une fonction mesurable positive sur une partie de $\mathbb{R}^2$, par exemple un triangle.

Exemple 5.15 Soit le triangle $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x\}$. On cherche à calculer l'intégrale

$$\int_T x \, d\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f \mathbb{1}_T\,,$$

où $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x \in \mathbb{R}$. Puisque $f\mathbb{1}_T$ est positive, on peut utiliser le théorème de Fubini-Tonelli pour calculer cette intégrale.

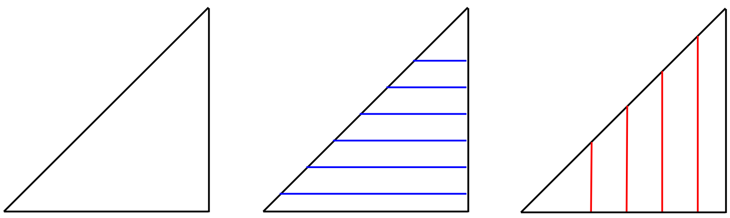


Figure 5.1 – Fubini-Tonelli pour un triangle

Avant tout chose on dessine T, et on détermine l'intersection de T avec les droites horizontales (y constant) et verticales (x constant) :

$$\textcolor{blue}{T \cap \{y = y_0\} = [y_0, 1] \times \{y_0\}} \;\text{ si } y_0 \in [0,1], \text{ et est vide sinon}$$
$$\textcolor{red}{T \cap \{x = x_0\} = \{x_0\} \times [0, x_0]} \text{ si } x_0 \in [0,1], \text{ et est vide sinon.}$$

En intégrant "en x à l'intérieur", on obtient que

$$\int_T f = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathbb{1}_T(x,y)\, d\lambda(x) \Big)\, d\lambda(y) = \int_{[0,1]} \Big(\int_{[y,1]} f(x,y)\, d\lambda(x) \Big)\, d\lambda(y)$$
$$= \int_{[0,1]} \Big(\int_{[y,1]} x\, d\lambda(x) \Big)\, d\lambda(y) = \int_{[0,1]} (\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2})\, d\lambda(y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

En effet $(f\mathbb{1}_T)(x,y)$ est nulle si y est hors de l'intervalle $[0,1]$, ou bien si $y \in [0,1]$ et x est hors de l'intervalle $[y,1]$; elle est égale à $f(x,y)$ sinon (dessin du milieu dans la figure 5.1).

En intégrant "en y à l'intérieur", on obtient que

$$\int_T f = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \mathbb{1}_T(x,y)\, d\lambda(y) \Big)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,x]} f(x,y)\, d\lambda(y) \Big)\, d\lambda(x)$$
$$= \int_{[0,1]} \Big(\int_{[0,x]} x\, d\lambda(y) \Big)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} x^2\, d\lambda(x) = \frac{1}{3}\,.$$

En effet $(f\mathbb{1}_T)(x,y)$ est nulle si x est hors de l'intervalle $[0,1]$, ou bien si $x \in [0,1]$ et y est hors de l'intervalle $[0,x]$; elle est égale à $f(x,y)$ sinon (dessin de droite dans la figure 5.1).

Comme prévu par le théorème, les deux options de calcul donnent le même résultat. Dans certains cas, il sera plus judicieux de choisir d'intégrer d'abord en x à l'intérieur, ou bien en y à l'intérieur : il faudra s'inspirer des circonstances.

Exercice 5.16 Aire du triangle.

Dans l'exemple précédent 5.15, prendre $f \equiv 1$ pour obtenir que l'aire du triangle T est $A(T) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_T\, d\lambda(x,y) = \int_T d\lambda(x,y) = 1/2$.

Passons maintenant à l'intégrale d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. Il faudra bien entendu commencer par montrer que f est intégrable, c'est-à-dire que $\int_{\mathbb{R}^2} |f|\, d\lambda < \infty$. Pour ce faire, on appliquera souvent (mais pas systématiquement) le théorème de Fubini-Tonelli (5.1) à la fonction $|f|$. Une fois l'intégrabilité de f assurée, on pourra appliquer le théorème de Fubini pour calculer l'intégrale de f.

Théorème 5.17 Théorème de Fubini.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. Alors :

- *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f_x : y \in \mathbb{R} \to f(x,y) \in \mathbb{C}$ est intégrable. De plus, la fonction $x \to \int_{\mathbb{R}} f_x\, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y) \in$ (qui est définie p.p. sur $\mathbb{R}$) est intégrable.*
- *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $f^y : x \in \mathbb{R} \to f(x,y) \in \mathbb{C}$ est intégrable. De plus, la fonction $y \to \int_{\mathbb{R}} f^y d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(x)$ (qui est définie p.p. sur $\mathbb{R}$) est intégrable.*

On a alors l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y) \Big)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(x) \Big)\, d\lambda(y)\,. \tag{5.2}$$

Les propriétés • assurent que toutes les expressions qui apparaissent dans (5.2) sont bien définies.

Remarque 5.18 L'hypothèse que f est intégrable est indispensable dans ce théorème. Sinon, l'intégrale de gauche n'est pas définie. Pire (? !), les deux intégrales de droite peuvent exister et avoir des valeurs différentes !

Dans l'illustration simplette de Fubini ci-dessous on constate que, pour une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, il peut arriver que les fonctions f_x (resp. f^y) ne soient intégrables que pour presque tout x (resp. presque tout y).

Exemple 5.19 Soit la fonction mesurable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(1,y) = e^y \sin y$ et $f(x,y) = 0$ si $x \neq 1$.

La fonction f est nulle en dehors de la droite $\{1\} \times \mathbb{R}$, qui est négligeable (exercice 5.12 ou 5.7). Cette fonction est donc intégrable et d'intégrale nulle, soit $\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda = 0$.

La fonction f_x est intégrable si et seulement si $x \neq 1$, donc presque partout, et dans ce cas f_x est la fonction nulle donc $\int f_x(y)\, d\lambda(y) = 0$.

La fonction $x \to \int f_x(y)\, d\lambda(y)$ est définie presque partout (pour $x \neq 1$), et y est nulle. Cette fonction est donc intégrable et d'intégrale nulle et on a bien $\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \big(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y) \big)\, d\lambda(x) = 0$.

Pour $y \in \mathbb{R}$, la fonction f^y est nulle p.p. (en l'occurrence sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$), donc elle est intégrable avec $\int f^y(x)\, d\lambda(x) = 0$. On retrouve commen attendu l'égalité $\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \big(\int_{\mathbb{R}} f^y(x)\, d\lambda(x) \big)\, d\lambda(y) = 0$.

Exercice 5.20 Fonctions décomposées.

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions intégrables. Démontrer que la fonction définie par $F : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to f(x)\, g(y) \in \mathbb{C}$ est intégrable et calculer $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, g(y)\, d\lambda(x,y)$ à l'aide de $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda$.
2. Soient $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ des fonctions intégrables ($n \geq 2$, $1 \leq i \leq n$). Démontrer que la fonction $F : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \in \mathbb{C}$ est intégrable, et exprimer $\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)\, d\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ à l'aide des intégrales $\int_{\mathbb{R}} f_i\, d\lambda$.

C Le théorème du changement de variable

Nous avons déjà évoqué la formule du changement de variable pour les intégrales en dimension 1 (voir la proposition 3.18). Nous nous intéressons maintenant à la dimension quelconque.

C.1 Rappels de calcul différentiel

Commençons par rappeler brièvement ce que sont une application de classe C^1 et un difféomorphisme (pour plus de détails, on pourra se reporter au cours de Calcul différentiel).

Définition 5.21 Application C^1, jacobienne, déterminant jacobien.

On note $(x_1, \cdots, x_n)$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$.

Une application $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 si et seulement si ses composantes φ_i admettent des dérivées partielles $\partial_j \varphi_i : U \to \mathbb{R}$ continues (pour $1 \leq i, j \leq n$).

La matrice jacobienne de φ au point x est alors la matrice (n, n) des dérivées partielles en ce point, soit

$$J_x(\varphi) = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1(x) & \dots & \partial_n\varphi_1(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1\varphi_n(x) & \dots & \partial_n\varphi_n(x) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant jacobien de φ est la fonction $x \mapsto \det J_x(\varphi)$, continue à valeurs réelles, définie pour $x \in U$ comme le déterminant

$$\det J_x(\varphi) = \det \big(\partial_j \varphi_i(x)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$$

de la matrice jacobienne au point x.

On utilise également la notation $\partial_j \varphi_i = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$.

Exemple 5.22 Une application linéaire, ou plus généralement polynomiale, est de classe C^1.

Soient $M \in \mathrm{M}_n\mathbb{R}$ et l'application linéaire $\varphi_M : x \in \mathbb{R}^n \mapsto Mx \in \mathbb{R}^n$. La matrice jacobienne de φ_M en chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ est $J_x(\varphi_M) = M$.

Exercice 5.23 Démontrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (xy^2 + 1, e^x + y)$ est de classe C^1, et déterminer sa matrice jacobienne ainsi que son déterminant jacobien en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Définition 5.24 Difféomorphisme.

Soit $n \geq 1$. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une application $\varphi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme si :

1. *φ réalise une bijection entre U et V ;*
2. *l'application $\varphi : U \to V$ est de classe C^1 ;*
3. *l'application réciproque $\varphi^{-1} : V \to U$ est également de classe C^1.*

Remarque 5.25 Même si cela ne nous sera pas utile ici, rappelons que lorsque $\varphi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme, son déterminant jacobien $\det J_x(\varphi)$ est non nul en chaque point $x \in U$.

En effet, on dérive l'expression $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}$, composée de fonctions de classe C^1, puis on prend le déterminant de l'expression obtenue. On obtient alors que $J_{\varphi(x)}\varphi^{-1} \circ J_x(\varphi) = \mathrm{Id}$, et donc en utilisant la multiplicativité du déterminant :

$$\det J_{\varphi(x)}(\varphi^{-1}) \cdot \det J_x(\varphi) = 1$$

pour tout $x \in U$. Le résultat suit.

L'exemple suivant est élémentaire, mais fondamental.

Proposition 5.26 *Soit $M \in \mathrm{Gl}_n\mathbb{R}$ une matrice inversible, c'est-à-dire dont le déterminant est non nul. Alors l'application linéaire associée définie par $\varphi_M : x \in \mathbb{R}^n \to Mx \in \mathbb{R}^n$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Son jacobien est l'application constante définie par $J_x(\varphi_M) = M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et le déterminant jacobien en chaque point vaut* $\det J_x(\varphi_M) = \det M \neq 0$.

Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, son image $V = \varphi_M(U) \subset \mathbb{R}^n$ est également ouverte, et la restriction $\varphi_M : U \to V$ est un difféomorphisme.

C.2 Déterminant et volume

L'intégrale de Lebesgue est reliée à la notion de "volume" : longueur en dimension 1, aire en dimension 2, volume 3-dimensionnel en dimension 3 etc... La formule du changement de variable (théorème 5.28) va faire apparaître un déterminant (le déterminant jacobien du difféomorphsime). Pour comprendre d'où sort ce déterminant, il faut avoir en tête le fait que le déterminant est intimement lié à la notion de volume. C'est, en petite dimension, ce qu'exprime le résultat suivant.

Proposition 5.27 *On vient de voir que le déterminant jacobien d'une application linéaire φ_M est constant, on le notera donc* $\det J(\varphi_M)$ *(sans référence au point où l'on considère la matrice jacobienne).*

Dimension 1 : *Soit $a \in \mathbb{R}$.*
L'image par l'application linéaire $\varphi_a : x \in \mathbb{R} \to ax \in \mathbb{R}$ du segment $[0, 1]$ *(de longueur* 1*) est un segment de longueur* $|a| = |\det J(\varphi_a)|$.

Dimension 2 : *Soit $M \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$.*
L'image par l'application linéaire $\varphi_M : x \in \mathbb{R}^2 \to Mx \in \mathbb{R}^2$ du pavé $[0, 1]^2$ *(d'aire* 1*) est un pavé d'aire* $|\det M| = |\det J(\varphi_M)|$.

Dimension 3 : *Soit $M \in \mathrm{M}_3\mathbb{R}$.*
L'image par l'application linéaire $\varphi_M : x \in \mathbb{R}^3 \to Mx \in \mathbb{R}^3$ du pavé $[0, 1]^3$ *(de volume* 1*) est un pavé de volume* $|\det M| = |\det J(\varphi_M)|$.

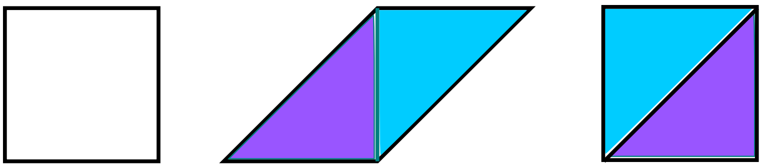
Éléments de preuve • L'assertion est claire en dimension 1.

• Plaçons-nous en dimension 2. Si la matrice M n'est pas inversible, l'image $\varphi_M([0,1]^2)$ est incluse dans une droite et est donc négligeable, tandis que $|\det M| = 0$.

Nous allons également évoquer deux exemples lorsque $M \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ est inversible (et l'on peut montrer que ces deux exemples suffisent à montrer l'assertion lorsque $M \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ est inversible quelconque).

$*$ Supposons pour commencer que $M = T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\det T = 1$. L'image $\varphi_T([0,1]^2)$ est le parallélogramme dessiné ci-dessous. Par découpage, on constate que ce parallélogramme a même aire, égale à 1, que le pavé de départ $[0,1]^2$.

$*$ Supposons maintenant que $M = D_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, avec $\det D_a = a$. L'image $\varphi_{D_a}([0,1]^2)$ est alors un rectangle de côtés 1 et $|a|$, donc d'aire égale à $|a|$.



C.3 Changement de variable dans l'intégrale

Théorème 5.28 Théorème du changement de variable en dimension n.

Soit $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $|\det J(\varphi)| : x \in U \mapsto |\det J_x(\varphi)| \in [0,\infty[$ la valeur absolue du déterminant jacobien.

• *Soit $f : V \to [0,+\infty]$ une fonction mesurable positive. Alors, la fonction $(f\circ\varphi)\,|\det J(\varphi)| : U \to [0,+\infty]$ est mesurable, et on a l'égalité :*

$$\int_V f\,d\lambda = \int_U (f\circ\varphi)\,|\det J(\varphi)|\,d\lambda \in [0,+\infty]\,. \tag{5.3}$$

• *Soit $f : V \to \mathbb{C}$ mesurable. Alors, la fonction $f : V \to \mathbb{C}$ est intégrable si et seulement si la fonction $(f\circ\varphi)\,|\det J(\varphi)| : U \to \mathbb{C}$ est intégrable. Dans ce cas, les intégrales de f sur V, et de $(f\circ\varphi)\,|\det J(\varphi)|$ sur U, sont égales :*

$$\int_V f\,d\lambda = \int_U (f\circ\varphi)\,|\det J(\varphi)|\,d\lambda\,, \tag{5.4}$$

$|\det J(\varphi)|$ désignant la valeur absolue du déterminant jacobien.

On peut remarquer que la seconde assertion est conséquence immédiate de la première, en revenant à la définition d'une fonction intégrable, et de son intégrale.

Un exemple très important d'application théorème de changement de variables concerne le passage en coordonnées polaires. L'exercice suivant sera traité en cours.

Exercice 5.29 Coordonnées polaires. L'application

$$\varphi : (r,\theta) \in \,]0,\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$$

définit un difféomorphisme sur son image $V := \varphi(\mathbb{R}^2)$.

1. Décrire V, et remarquer que $\mathbb{R}^2 \setminus V$ est négligeable.
2. Déterminer le déterminant jacobien $\det J_{(r,\theta)}(\varphi)$ de φ au point (r,θ).

Vous pourrez donc utiliser à volonté la proposition suivante.

Proposition 5.30 Intégrer en polaires.

Pour une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ (ou alors pour une fonction mesurable positive $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty]$), on a l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda(x,y) = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\; d\lambda(r,\theta)\,.$$

L'utilisation des coordonnées polaires se révèle particulièrement utile pour intégrer des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui ne dépendent que de la distance à l'origine. Donnons un exemple.

Exercice 5.31 Calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\lambda(t)$.

Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to e^{-(x^2+y^2)} \in [0,\infty[$. On introduit $I = \int_{[0,\infty[} e^{-t^2}\, d\lambda(t)$ et $J = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda(x,y)$.

1. Calculer J en passant en coordonnées polaires.
2. En déduire la valeur de I. On pourra penser à utiliser le théorème de Fubini (ou l'exercice 5.20) pour exprimer l'intégrale J à l'aide de I.
3. Montrer alors, pour $a > 0$, l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\, d\lambda(t) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}.$$

Vous retrouvez ainsi les densités de probabilité des lois normales.

Le théorème du changement de variable généralise comme suit la proposition 3.25, qui avait énoncée en dimension 1, à la dimension supérieure.

Exercice 5.32 Propriétés d'invariance de l'intégrale.

En faisant intervenir les difféomorphismes

$$\begin{aligned} \tau_y &: x \in \mathbb{R}^n \to x - y \in \mathbb{R}^n \qquad && (y \in \mathbb{R}^n) \\ h_s &: x \in \mathbb{R}^n \to sx \in \mathbb{R}^n && (s \in \mathbb{R}^*) \\ j &: x \in \mathbb{R}^n \to -x \in \mathbb{R}^n \,, \end{aligned}$$

retrouver, puis généraliser en dimension quelconque, les propriétés d'invariance de l'intégrale (proposition 3.25) comme cas particuliers du théorème 5.28. On obtient, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ et tout scalaire $s \neq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\, d\lambda(x) = |s|^n \int_{\mathbb{R}^n} f(sx)\, d\lambda(x)\,.$$

Remarque 5.33 Comparaison avec la dimension 1.

Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur $\varphi([a,b])$ et $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f. On a vu à la proposition 3.18 (3) que

$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi)\, \varphi'\, d\lambda = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))\,. \tag{$*1$}$$

Si nous supposons de plus que la restriction $\varphi :]a,b[\to]c,d[$ est un difféomorphisme, son jacobien au point $x \in]a,b[$ est $J_x(\varphi) = \varphi'(x)$, et le théorème du changement de variable assure que

$$\int_{]a,b[} (f \circ \varphi)\, |\varphi'(x)|\, d\lambda = \int_{]c,d[} f\, d\lambda\,, \tag{$*2$}$$

$$\text{où} \quad \int_{]c,d[} f\, d\lambda = \int_{[c,d]} f\, d\lambda = F(d) - F(c)\,.$$

Puisque nous avons supposé que φ est un difféomorphisme, la dérivée φ' ne change pas de signe sur $]a,b[$.

Supposons φ croissante, c'est-à-dire $\varphi' > 0$. Dans ce cas $\varphi(a) = c$ et $\varphi(b) = d$.

Supposons φ décroissante, c'est-à-dire $\varphi' < 0$. Dans ce cas $\varphi(a) = d$ et $\varphi(b) = c$.

Dans les deux cas, on a bien cohérence des expressions $(*1)$ et $(*2)$.

6. Transformée de Fourier

Les séries de Fourier permettent de décomposer une fonction périodique en superposition de signaux “élémentaires”, qui font apparaître une composante fondamentale et des harmoniques (voir par exemple l'appendice **??**).

Il faut voir la transformée de Fourier comme un analogue des séries de Fourier, pour des fonctions qui ne sont plus supposées périodiques.

Une des caractéristiques fondamentales commune aux séries de Fourier et à la transformée de Fourier est de remplacer un opérateur de dérivation par un opérateur de multiplication. C'est cette remarque qui en fait un outil de choix pour étudier des équations aux dérivées partielles, ce que nous illustrerons par un début d'étude de l'équation de la chaleur.

A Définition et premières propriétés

Nous commençons par introduire la transformée de Fourier d'une fonction intégrable, puis nous énonçons quelques propriétés relativement élémentaires de cette transformation. Ceci nous fournit l'occasion de revoir beaucoup de propriétés de l'intégrale de Lebesgue !

Remarque 6.1 On trouve dans la littérature plusieurs choix de normalisation pour la transformée de Fourier. Quelle que soit la définition choisie, un facteur 2π apparaîtra quelque part (pour nous, ce sera dans la formule d'inversion de Fourier) : si vous le chassez par la porte, il rentrera par la fenêtre !

Définition 6.2 Transformée de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. La transformée de Fourier de f est la fonction $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par l'expression

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{-itx}\, d\lambda(t)\,.$$

On notera également $\mathcal{F}f = \hat{f}$.

Proposition 6.3 *Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est bien définie, et c'est une fonction continue et bornée.*

Preuve Cela va résulter du théorème 4.29 de continuité sous l'intégrale, appliqué à la fonction $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $h(x,t) = f(t)\, e^{-itx}$.

Domination : Pour $x, t \in \mathbb{R}$, on a $|e^{-itx}| = 1$. On a donc la domination $|h(x,t)| \leq |f(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$: rappelons en effet que, par hypothèse, la fonction $g = |f|$ intégrable. La transformée de Fourier de f est donc bien définie.

Continuité : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(t)\, e^{-itx} \in \mathbb{C}$ est continue. Le théorème 4.29 s'applique donc pour montrer la continuité de $\hat{f}$.

Le fait que $\hat{f}$ soit bornée est conséquence de l'inégalité triangulaire dans l'intégrale. On a en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la majoration

$$|\hat{f}(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt}\, d\lambda(t) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, d\lambda(t)\,. \qquad \square$$

Remarque 6.4 On peut même montrer que la fonction continue $\hat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$: c'est le lemme de Riemann-Lebesgue. Mais il s'agit d'un résultat bien plus profond, qui repose sur la "régularité" de la mesure de Lebesgue (qui assure que toute fonction intégrable est approchable - en moyenne - par des fonctions de classe C^1 à support compact).

Définition 6.5 *On introduit également la "transformée de Fourier inverse" $\overline{\mathcal{F}} f$ de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$\overline{\mathcal{F}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{itx}\, d\lambda(t)\,.$$

Lemme 6.6 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Introduisons $\overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction conjuguée de f, ainsi que la fonction symétrisée $f^\vee : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, respectivement définies pour $t \in \mathbb{R}$ par $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$ et par $f^\vee(t) = f(-t)$. On a alors les identités*

$$\overline{\mathcal{F}} f = (\mathcal{F} f)^\vee = \mathcal{F}(f^\vee) = \overline{\mathcal{F}\overline{f}}\,.$$

Preuve Soit $f \in \mathcal{L}^1$. Par définition de $\overline{\mathcal{F}}$, on a l'égalité $\overline{\mathcal{F}} f = (\mathcal{F} f)^\vee$. Le changement de variable $t \mapsto -t$ (exercice 5.32) donne, pour $x \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$(\overline{\mathcal{F}} f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{itx}\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(-t)\, e^{-itx}\, d\lambda(t) = \mathcal{F}(f^\vee)(x)\,.$$

Enfin, la conjugaison complexe $z \in \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2 \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Par linéarité de l'intégrale, il suit pour tout $x \in \mathbb{R}$ que

$$\overline{\mathcal{F}\overline{f}(x)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}\, e^{-itx}\, d\lambda(t)} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{itx}\, d\lambda(t) = \overline{\mathcal{F}} f(x)\,. \qquad \square$$

Remarque 6.7 Pour une variable aléatoire X de densité f_X, la fonction caractéristique définie par $\varphi_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(e^{itX}) \in \mathbb{C}$ vérifie $\varphi_X = \overline{\mathcal{F}} f_X$.

Comme nous le verrons lors de la démonstration de la formule d'inversion de Fourier, ou encore lors de notre étude élémentaire de l'équation de la chaleur, les identités fonctionnelles satisfaites par la transformée de Fourier sont de première importance.

Notation 6.8 *Pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *on désignera par* $\tau_s f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *la fonction translatée de* f *définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *par* $\tau_s f(t) = f(t-s)$. *On rappelle (proposition 3.25) que* $\tau_s f$ *est intégrable si* f *l'est.*

Notation 6.9 *On introduit également les fonctions* $\chi_s : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{ist} \in \mathbb{C}^*$ *(pour* $s \in \mathbb{R}$*). Ce sont les "caractères" du groupe additif* $(\mathbb{R}, +)$.

Leurs alter ego en série de Fourier seront les fonctions 2π-périodiques définies pour $n \in \mathbb{Z}$ par $\chi_n : t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \mapsto e^{int} \in \mathbb{C}^*$.

Proposition 6.10 Propriétés fonctionnelles 1.

Pour $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}^*$ *on introduit les fonctions intégrables suivantes dont les transformées de Fourier s'expriment, en fonction de la transformée de Fourier de* f, *comme suit :*

- $g_s(t) = e^{ist} f(t) \qquad \widehat{g_s} = \tau_s \hat{f}$
- $h_s = \tau_s f \qquad \widehat{h_s}(x) = e^{-isx} \hat{f}(x)$
- $f_a(t) = |a| f(at) \qquad \widehat{f_a}(x) = \hat{f}(\frac{x}{a})$.

Les deux premières identités expriment que la transformée de Fourier échange translation et multiplication par un caractère, soit

$$\mathcal{F}(\chi_s f) = \tau_s(\mathcal{F} f) \text{ et } \mathcal{F}(\tau_s f) = \chi_{-s}(\mathcal{F} f) \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Preuve On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les égalités

$$\widehat{g_s}(x) = \int_{\mathbb{R}} g_s(t) e^{-itx} \, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it(x-s)} \, d\lambda(t) = \hat{f}(x-s) = (\tau_s \hat{f})(x)$$

puis, en utilisant l'invariance de l'intégrale par translation (changement de variable $u = t - s$, proposition 3.25),

$$\begin{aligned} \widehat{h_s}(x) &= \int_{\mathbb{R}} h_s(t) e^{-itx} \, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s) e^{-itx} \, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i(u+s)x} \, d\lambda(u) \\ &= e^{-isx} \hat{f}(x) \end{aligned}$$

et enfin, avec le changement de variable $t \to at$ (proposition 3.25),

$$\widehat{f_a}(x) = \int_{\mathbb{R}} |a| f(at) e^{-itx} \, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-iux/a} \, d\lambda(t) = \hat{f}(\frac{x}{a}) \, . \qquad \square$$

Une autre propriété fondamentale de la transformée de Fourier est qu'elle échange dérivation et multiplication par un polynôme. Ici, il faut être un peu soigneux avec les hypothèses.

Pour une fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$ on se permettra de noter **abusivement** tf la fonction définie par $t \in \mathbb{R} \mapsto tf(t) \in \mathbb{C}$.

Proposition 6.11 Propriétés fonctionnelles 2.
Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

1. On suppose que la fonction $t \mapsto tf(t)$ est également intégrable sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, la transformée de Fourier de f est de classe C^1 et on a l'égalité

$$\mathcal{F}(tf) = i\,(\mathcal{F}f)'\,.$$

2. On suppose maintenant que f est de classe C^1, et que sa dérivée f' est intégrable. On a alors l'égalité

$$\mathcal{F}(f') = ix\,\mathcal{F}f\,.$$

Commençons par un lemme qui nous permettra de justifier une intégration par parties sur un intervalle non borné, ce qu'on ne peut faire sans précautions (voir l'encadré suivant l'exemple 3.22). Vous savez qu'une fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, même si on la suppose continue, ne tend pas toujours vers 0 à l'infini. Avec une hypothèse supplémentaire, cela devient vrai.

Lemme 6.12 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On suppose que f est continûment dérivable, et que sa dérivée f' est intégrable. Alors $f(t) \to 0$ lorsque $|t| \to \infty$.*

Preuve La fonction f étant de classe C^1, on a $f(T) = f(0) + \int_0^T f'(t)\,d\lambda(t)$ pour tout $T > 0$. Puisque f' est supposée intégrable, il suit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Puisque f elle-même est intégrable, on doit avoir $\ell = 0$. Un raisonnement semblable montre que $f(T) \to 0$ lorsque $T \to -\infty$. Ceci achève la démonstration. □

Preuve de la proposition 6.11

1. Soit donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable, telle que la fonction $t \mapsto tf(t)$ soit également intégrable. On introduit la fonction

$$h : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto f(t)\,e^{-itx} \in \mathbb{C}\,.$$

On vérifie que h satisfait les hypothèses de dérivabilité sous le signe intégrale. En effet, on a déjà vu que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto h(x,t) \in \mathbb{C}$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $h_t : x \in \mathbb{R} \mapsto f(t)\,e^{-itx} \in \mathbb{C}$ est de classe C^1, de dérivée $h_t'(x) = -itf(t)e^{-itx}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$|h_t'(x)| = |tf(t)e^{-itx}| = |tf(t)|\,.$$

Nous avons supposé que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto |tf(t)| \in [0,+\infty]$ est intégrable : il s'agit donc bien d'une domination. Le théorème 4.34 s'applique donc pour montrer que $\mathcal{F}f$ est de classe C^1 avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$(\mathcal{F}f)'(x) = \int_{\mathbb{R}} h_t'(x)\,d\lambda(t) = (-i)\int_{\mathbb{R}} tf(t)e^{-itx}\,dt = -i\,\mathcal{F}(tf)(x)\,.$$

2. Supposons maintenant que f soit continûment dérivable, et que sa dérivée f' soit intégrable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on utilise le théorème de convergence dominée pour se ramener à une intégrale sur un segment, puis une intégration par parties, et enfin de nouveau le théorème de convergence dominée. On obtient successivement :

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(f'))(x) &= \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-itx}\,d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty}\int_{[-n,n]} f'(t)e^{-itx}\,d\lambda(t)\\ &= \lim_{n\to\infty}[f(n)e^{-inx} - f(-n)e^{inx} + ix\int_{[-n,n]} f(t)e^{-itx}\,d\lambda(t)]\\ &= ix\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}\,d\lambda(t)\,.\end{aligned}$$

Le lemme 6.12 assure, sous nos hypothèses, que le terme entre crochets tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, de sorte que $\mathcal{F}f' = (ix)\mathcal{F}f$. □

B Transformée de Fourier d'une gaussienne

La formule d'inversion de Fourier affirme que, pour toute "bonne" fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (l'hypothèse précise est que les deux fonctions f et $\mathcal{F}f$ soient intégrables), on a l'égalité $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = (2\pi)\,f$ (théorèmes 6.22 et 6.24).

Un point clé pour prouver le théorème d'inversion de Fourier dans toute sa généralité consister à remarquer que cette propriété est vérifiée pour une seule fonction, ici une gaussienne. Pour cela on montre que la gaussienne est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, et l'on observe que sa transformée est solution de la même équation différentielle.

Lemme 6.13 *Les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1, solutions de l'équation différentielle $g'(x) = -x\,g(x)$ (E), sont les fonctions $x \in \mathbb{R} \to a\,e^{-x^2/2}$ avec $a \in \mathbb{C}$.*

Preuve Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. En dérivant la fonction $h : x \to g(x)e^{x^2/2}$ on observe, puisque l'exponentielle ne s'annule pas, que g est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction h est constante. Le résultat est prouvé. □

Proposition 6.14 *Soit $G : t \in \mathbb{R} \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} \in \mathbb{R}$. On a l'identité*

$$\hat{G}(x) = e^{-x^2/2} \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

et donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}G = (2\pi)\,G$.

Preuve La fonction G est intégrable avec $\int_{\mathbb{R}} G(t)\,d\lambda(t) = 1$ (exercice 5.31).

Nous cherchons maintenant à utiliser les propriétés fonctionnelles de la transformée de Fourier. On observe que la gaussienne G est une fonction de classe C^∞ dont la dérivée vérifie $G'(t) = -t\,G(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Les fonctions G' et tG étant toutes deux intégrables (proposition 3.33), la proposition 6.11 s'applique. Il suit que la fonction $\hat{G}$ est de classe C^1, et est solution de l'équation différentielle

$$(\hat{G})'(x) = -x\,\hat{G}(x)\,. \tag{E}$$

Il existe donc une constante $a \in \mathbb{C}$ pour laquelle $\hat{G}(x) = a\,e^{-x^2/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En remarquant que $\hat{G}(0) = \int_{\mathbb{R}} G(t)\,d\lambda(t) = 1$, il vient $a = 1$ et donc $\mathcal{F}G = \sqrt{2\pi}\,G$.

La formule d'inversion pour G suit puisque, la fonction G étant paire, on a $\overline{\mathcal{F}}(G) = \mathcal{F}G = \sqrt{2\pi}\,G$ et donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}G = \overline{\mathcal{F}}\sqrt{2\pi}G = (2\pi)G$. □

Exercice 6.15 Pour $a > 0$, montrer que la transformée de Fourier de la fonction $G_a : x \in \mathbb{R} \to \dfrac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2x^2/2} \in \mathbb{R}$ vérifie $\hat{G}_a(\xi) = e^{-\xi^2/2a^2}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Constater que G_a vérifie également la formule d'inversion de Fourier.

C L'espace de Schwartz

L'espace de Schwartz $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace fonctionnel dans lequel l'étude de la transformée de Fourier est la plus facile à mener. Nous verrons en particulier que cet espace est invariant sous transformation de Fourier.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction. On rappelle que la notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f, lorsque celle-ci existe. Pour alléger les notations, on se permettra (☺) de nouveau de noter $t^k f$ la fonction définie par $t \mapsto t^k f(t)$.

Définition 6.16 L'espace de Schwartz [1] .

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ est l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ dont chaque dérivée est à décroissance rapide, c'est-à-dire telles qu'on ait pour tous entiers $k, p \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{|t|\to\infty} t^p\, f^{(k)}(t) = 0\,.$$

Remarque 6.17 Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ appartient $\mathcal{S}$ si et seulement si elle est de classe C^∞ avec, pour tous $k, p \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |t^p\, f^{(k)}(t)| < \infty\,.$$

Exemple 6.18 La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t^2} \in \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{S}$.

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞ et qui est nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}$, appartient à $\mathcal{S}$.

1. Du nom de Laurent Schwartz (1915–2002), mathématicien français qui a introduit la théorie des distributions à la fin des années 40. A ne pas confondre avec Hermann Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand, qui a donné son nom à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. le cours sur les espaces de Hilbert).

Lemme 6.19 *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Preuve En effet cette fonction étant continue, elle est intégrable sur tout segment. Il suffit donc de vérifier qu'elle est intégrable au voisinage de $\pm\infty$. Or, puisque la fonction $t \to t^2 f(t)$ tend vers 0 à l'infini, il suit que $|f(t)| \leq t^{-2}$ lorsque $|t|$ est assez grand. Le résultat suit, puisque la fonction $t \mapsto t^{-2}$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$. □

Lemme 6.20 *L'espace de Schwartz est un espace vectoriel qui est stable par dérivation, ainsi que par multiplication par un polynôme :*

Soit $f \in \mathcal{S}$. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions $f^{(k)}$ et $t \mapsto P(t)\, f(t)$ appartiennent également à $\mathcal{S}$.

Preuve Il suffit d'observer que $(tf)^{(p)} = tf^{(p)} + pf^{(p-1)}$ pour $p \geq 1$. □

Proposition 6.21 Propriétés fonctionnelles 3 : sur $\mathcal{S}$.

Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$.

On a de plus, pour tous entiers $k, p \in \mathbb{N}$, les identités

$$\mathcal{F}(t^p f) = i^p (\mathcal{F}f)^{(p)} \quad \textit{et} \quad \mathcal{F}(f^{(k)}) = (ix)^k \mathcal{F}f.$$

Preuve • Pour $g \in \mathcal{S}$, montrons que $\mathcal{F}g$ est à décroissance rapide.

Une récurrence sur k, avec la proposition 6.11.(2), montre que $\mathcal{F}(g^{(k)}) = (ix)^k \mathcal{F}g$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque la transformée de Fourier de $g^{(k)}$ est bornée (proposition 6.3), il suit que la fonction $\mathcal{F}g$ est à décroissance rapide.

• Soit $f \in \mathcal{S}$.

On constate d'abord que $\mathcal{F}f$ est de classe C^p pour tout $p \in \mathbb{N}$, avec $(\mathcal{F}f)^{(p)} = (-i)^p \mathcal{F}(t^p f)$ (récurrence sur p, en utilisant la proposition 6.11.(1)). En particulier, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ est de classe C^∞.

Pour $p \in \mathbb{N}$, la fonction $g_p : t \mapsto t^p f(t)$ appartient également à $\mathcal{S}$. Il suit donc du premier point que la dérivée $(\mathcal{F}f)^{(p)}$ est à décroissance rapide. □

Théorème 6.22 Inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$.

Soit $f \in \mathcal{S}$. On a l'égalité

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = (2\pi)\, f\,.$$

En particulier, l'application $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est une bijection.

Le lemme suivant affirme qu'on peut diviser, dans $\mathcal{S}$, par la fonction $t \mapsto t$ une fonction $f \in \mathcal{S}$ qui s'annule en l'origine. Une fois ce lemme acquis, la preuve du théorème d'inversion de Fourier sur $\mathcal{S}$ suivra de façon élémentaire des propriétés fonctionnelles de la transformée de Fourier et de l'égalité $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}G = (2\pi)\, G$, où G est la gaussienne de la proposition 6.14.

Lemme 6.23 *Soit $f \in \mathcal{S}$, telle que $f(0) = 0$. Alors il existe une fonction $h \in \mathcal{S}$ telle que $f(t) = t\,h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

Preuve du théorème 6.22

Soit une fonction $f \in \mathcal{S}$. On veut montrer l'égalité $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(s) = (2\pi)\ f(s)$ pour tout point $s \in \mathbb{R}$.

• Commençons par montrer la formule d'inversion de Fourier en l'origine, c'est-à-dire l'égalité $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(0) = (2\pi)\ f(0)$.

$*$ Supposons en un premier temps que f s'annule en 0. On peut donc, d'après le lemme 6.23, écrire $f(t) = t\,h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $h \in \mathcal{S}$. La proposition 6.11 assure donc que $\hat{f} = i\,(\hat{h})'$. On a donc

$$\begin{aligned}(-i)\,\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f(0) &= \int_{\mathbb{R}} (\hat{h})'(t)\,d\lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} (\hat{h})'(t)\,d\lambda(t)\\ &= \lim_{n\to\infty} \hat{h}(n) - \hat{h}(-n) = 0\,,\end{aligned}$$

puisque $\hat{h} \in \mathcal{S}$ tend vers 0 en $\pm\infty$. On a donc bien $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(0) = (2\pi)\ f(0)$ puisque $f(0) = 0$.

$*$ Si l'on ne suppose plus que f s'annule en 0, on peut écrire $f = f_0 + aG$, où G est la gaussienne de la proposition 6.14 et où $a \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que la fonction $f_0 \in \mathcal{S}$ s'annule en 0. Par linéarité de la transformée de Fourier, il vient

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f_0 + a\,\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}G\,,$$

puis, en utilisant le cas précédent et la proposition 6.14, $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(0) = (2\pi)f(0)$.

• Nous allons maintenant en déduire la formule d'inversion de Fourier en tout point $s \in \mathbb{R}$. Pour cela, évaluons $(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(s)$ en utilisant les propriétés fonctionnelles (6.1) comme suit :

$$\begin{aligned}(\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f)(s) &= (\mathcal{F}\mathcal{F}f)(-s) = (\tau_s\mathcal{F}\mathcal{F}f)(0) = (\mathcal{F}[\chi_s\mathcal{F}f])(0)\\ &= (\mathcal{F}\mathcal{F}(\tau_{-s}f))(0)\,.\end{aligned}$$

La formule d'inversion de Fourier en l'origine, pour la fonction $\tau_{-s}f \in \mathcal{S}$, donne alors

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(\tau_{-s}f)(0) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(\tau_{-s}f)(0) = (2\pi)(\tau_{-s}f)(0) = (2\pi)\,f(s)\,,$$

ce qu'on voulait.

• Il suit de la formule d'inversion de Fourier que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est injective. Puisque $\overline{\mathcal{F}}(g) = \mathcal{F}(g^\vee)$ pour tout $g \in \mathcal{S}$, il suit également que $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est surjective. L'inverse de $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est l'application $(2\pi)^{-1}\overline{\mathcal{F}}$. □

Preuve du lemme 6.23

On veut factoriser la fonction $f : t \mapsto f(t)$, supposée s'annuler en 0, par t. Pour cela, on écrit le théorème fondamental de l'analyse pour la fonction f. Il vient, avec le changement de variable $s = tu$:

$$f(t) = \int_0^t f'(s)\,ds = \int_0^1 t\,f'(tu)\,du = t\int_0^1 f'(tu)\,du = t\int_{[0,1]} f'(tu)\,d\lambda(u)\,.$$

On a préféré écrire les premières intégrales sous forme d'intégrales de Riemann, pour ne pas avoir à se préoccuper du signe de t.

On introduit donc la fonction $h : t \in \mathbb{R} \mapsto \int_{[0,1]} f'(tu)\,d\lambda(u) \in \mathbb{C}$, de sorte que $f(t) = t\,h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous devons montrer que $h \in \mathcal{S}$.

• On commence par montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

En utilisant les théorèmes 4.29 et 4.34 sur les intégrales dépendant d'un paramètre, on démontre par récurrence que h vérifie pour tout $k \geq 0$:

Propriété H_k **:** *la fonction h est de classe C^k sur l'intervalle $\mathbb{R}$ avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $h^{(k)}(t) = \int_{[0,1]} u^k\,f^{(k+1)}(tu)\,du$*
ce qui sous-entend que l'intégrand... est intégrable ! Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < \infty$.

$*$ *Initialisation (H_0) :* Soit $g : (t,u) \in \mathbb{R}\times[0,1] \mapsto f'(tu) \in \mathbb{C}$.
Pour tout $u \in [0,1]$, l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto g(t,u) = f'(tu) \in \mathbb{C}$ est continue. On a également la domination $|g(t,u)| = |f'(tu)| \leq M_1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où la fonction constante $u \in [0,1] \mapsto M_1 \in [0,+\infty[$ est intégrable sur ce segment. Le théorème de continuité sous le signe intégrale s'applique, et montre que h est continue sur $\mathbb{R}$.

$*$ *Hérédité :* Soit $k \geq 0$. Supposons l'assertion H_k vraie. Introduisons la fonction $g_k : (t,u) \in \mathbb{R}\times[0,1] \mapsto u^k f^{(k+1)}(tu) \in \mathbb{C}$.

Pour $u \in [0,1]$, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto u^k f^{(k+1)}(tu) \in \mathbb{C}$ est de classe C^1. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a la domination

$$\Big|\frac{\partial g_k}{\partial t}(t,u)\Big| = |u^{k+1} f^{(k+2)}(tu)| \leq M_{k+2} \quad \text{pour tout } u \in [0,1],$$

où la fonction constante égale à M_{k+2} est intégrable sur le segment $[0,1]$. Le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique, et montre que la propriété H_{k+1} est vraie.

• Puisque h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(t) = t\,h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$f^{(k)}(t) = k\,h^{(k-1)}(t) + t\,h^{(k)}\,. \tag{6.2}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. De l'identité $t^p h(t) = t^{p-1} f(t)$ (pour tout $t \neq 0$), il suit que $t^p h(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Avec (6.2), une récurrence immédiate sur k montre également que $t^p h^{(k)}(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a donc bien $h \in \mathcal{S}$ comme annoncé. □

D La transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

On ne peut pas clore ce chapitre sans mentionner le théorème d'inversion de Fourier sur l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables.

Théorème 6.24 Inversion de Fourier dans $\mathcal{L}^1$.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Supposons que la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ soit également une fonction intégrable. On a alors l'égalité

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = (2\pi)f \text{ p.p.}$$

Remarque 6.25 L'hypothèse $\mathcal{F}f$ intégrable assure que la fonction $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$ est bien définie.

Si l'on remplace f par une autre fonction intégrable g telle que $f = g$ p.p., on a l'égalité $\mathcal{F}f = \mathcal{F}g$ en tout point. La conclusion du théorème ne peut donc être ici qu'une égalité presque partout !

Sous les hypothèses du théorème, la fonction f est donc égale presque partout à la fonction *continue* $(1/2\pi)\,\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$.

Tout comme le lemme de Riemann-Lebesgue évoqué plus haut, ce résultat repose sur la régularité de la mesure de Lebesgue qui assure notamment que l'on peut approcher – en moyenne - toute fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ par une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $f_n \in \mathcal{S}$ de l'espace de Schwartz, au sens où

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f|\, d\lambda \to_{n\to\infty} 0\,.$$

Corollaire 6.26 Injectivité de Fourier.

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f = 0$. Alors la fonction f est nulle presque partout.

Remarque 6.27 Le bon cadre pour énoncer ce théorème d'injectivité (qui porterait alors mieux son nom) est celui de l'espace $L^1(\mathbb{R})$, qui sera évoqué au chapitre 8.

7. Application à une équation aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, nous montrons sur un exemple simple ce que la transformée de Fourier peut apporter dans l'étude d'une équation aux dérivées partielles.

A Convolution

Avant de nous intéresser à l'équation de la chaleur, nous introduisons une opération fondamentale en analyse : la convolution de deux fonctions. Tout comme dans le chapitre précédent, nous nous limiterons par souci de simplification à convoler deux fonctions appartenant à l'espace de Schwartz.

Définition 7.1 Convolée de deux fonctions.
Soient $f, g \in \mathcal{S}$. Leur convolée $f * g$ est définie en tout point $x \in \mathbb{R}$ par l'expression

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, d\lambda(y)\,.$$

Lemme 7.2 *Soient $f, g \in \mathcal{S}$.*
La convolée $f * g$ est bien définie (et elle est bornée).
On a l'égalité $f * g = g * f$.
La convolée $f * g \in \mathcal{S}$ appartient à l'espace de Schwartz avec, pour $k \in \mathbb{N}$, les égalités $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)} = f^{(k)} * g$ (E_k).

Il suit facilement de la démonstration de (E_k) et de la commutativité du produit de convolution que, pour $0 \leq \ell \leq k$, on a également l'égalité $(f * g)^{(k)} = f^{(\ell)} * g^{(k-\ell)}$.

Preuve Une fonction de l'espace de Schwartz est bornée, et intégrable. Le produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable est intégrable. Il suit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(y)g(x-y) \in \mathbb{C}$ est intégrable : la convolée $f * g$ est donc bien définie en tout point $x \in \mathbb{R}$. Remarquons d'emblée que $f * g$ est bornée, avec par exemple

$$\|f * g\|_\infty \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, d\lambda(y)\Big)\, \|g\|_\infty\,.$$

L'égalité $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ suit de la définition, en utilisant le changement de variable $y \mapsto z = x - y$.

Démontrons que la convolée $f * g$ est de classe C^1. On applique pour cela le théorème de dérivation sous le signe intégrale (théorème 4.34) à la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = f(y)g(x - y)$. Vérifions que les hypothèses en sont bien satisfaites :
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \in \mathbb{R} \mapsto f(y)g(x - y) \in \mathbb{C}$ est intégrable (car dominée par $\|g\|_\infty |f|$ avec $|f|$ intégrable)
2. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(y)g(x - y) \in \mathbb{C}$ est de classe C^1
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\frac{\partial h}{\partial x} : y \in \mathbb{R} \mapsto f(y)g'(x - y) \in \mathbb{C}$ est dominée par la fonction intégrable $\|g'\|_\infty |f|$.

Le théorème s'applique donc pour montrer que $f * g$ est de classe C^1 avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $(f * g)'(x) = \int_\mathbb{R} f(y)g'(x - y)\, d\lambda(y)$.

On montre alors par une récurrence immédiate que la convolée $(f * g)$ est de classe C^∞ et que ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant sous le signe intégrale.

Montrons maintenant que chaque dérivée $(f * g)^{(k)}$ est à décroissance rapide. Soit donc $p \in \mathbb{N}$. On obtient, avec la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} x^p\,(f * g)^{(k)}(x) &= x^p \int_\mathbb{R} f(y)g^{(k)}(x - y)\; d\lambda(y) \\ &= \int_\mathbb{R} (x - y + y)^p\, f(y)g^{(k)}(x - y)\; d\lambda(y) \\ &= \sum_{j=0}^{p} C_p^j \int_\mathbb{R} [y^j\; f(y)]\,[(x - y)^{p-j} g^{(k)}(x - y)]\; d\lambda(y)\,. \end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto x^p\,(f * g)(x)$ s'obtient comme combinaison linéaire de fonctions obtenues par convolution de fonctions $x \mapsto x^j f^{(k)}(x)$ et $x \mapsto x^{p-j} g(x)$ qui appartiennent à l'espace de Schwartz. Elle est donc bornée. On conclut avec la remarque 6.17 que $f * g \in \mathcal{S}$. □

La transformée de Fourier satisfait également des propriétés fonctionnelles faisant intervenir le produit de convolution. Notons avant toute chose que le produit (usuel) fg de deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}$ appartient encore à $\mathcal{S}$ – cela suit de la formule de Leibniz pour les dérivées d'un produit.

Proposition 7.3 Propriétés fonctionnelles 4 : convolution.

Soient $f, g \in \mathcal{S}$. On a l'identité $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)\;(\mathcal{F}g)$.

Preuve Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a, par définition,

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(f * g))(\xi) &= \int_\mathbb{R} (f * g)(x)\, e^{-ix\xi}\, d\lambda(x) \\ &= \int_\mathbb{R} \Big(\int_\mathbb{R} f(y)g(x - y)\; d\lambda(y) \Big)\, e^{-ix\xi}\, d\lambda(x)\,. \end{aligned}$$

On brûle d'envie d'appliquer le théorème de Fubini 5.17 à la fonction définie par $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(y)g(x-y)e^{-ix\xi} \in \mathbb{C}$. Mais on doit d'abord vérifier que h est intégrable. Pour cela, nous appliquons le théorème de Fubini-Tonelli 5.11 à la fonction positive $|h|$. Il vient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |h(x,y)|\, d\lambda(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} |f(y)|\, |g(x-y)|\, d\lambda(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \Big(\int_{\mathbb{R}} |g(x-y)|\ d\lambda(x)\Big)\, d\lambda(y)\\ &= (\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda)\,(\int_{\mathbb{R}} |g|\, d\lambda) < \infty\,.\end{aligned}$$

Nous avons donc, avec Fubini une première fois :

$$(\mathcal{F}(f*g))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, d\lambda(x,y)$$

donc

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(f*g))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)e^{-ix\xi}\, d\lambda(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \big(f(y)e^{-iy\xi}\big)\ \big(g(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\big)\, d\lambda(x,y)\end{aligned}$$

puis en utilisant de nouveau Fubini, ainsi qu'un changement de variable $y \mapsto x - y$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(f*g))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\xi}\ \Big(\int_{\mathbb{R}} \big(g(x-y)e^{-i(x-y)\xi}\big)\, d\lambda(x)\Big)\, d\lambda(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\xi}\ (\mathcal{F}g)(\xi)\, d\lambda(y)\\ &= (\mathcal{F}f)(\xi)\,(\mathcal{F}g)(\xi)\,.\end{aligned}$$ □

Exercice 7.4 En déduire l'identité $\mathcal{F}(fg) = (1/2\pi)(\mathcal{F}f)*(\mathcal{F}g)$ lorsque f et g sont deux fonctions de l'espace de Schwartz. On pensera à utiliser la formule d'inversion de Fourier.

B Approximation de l'unité

Rappelons que la gaussienne de variance $1/a^2$ est définie, pour $a > 0$, par $G_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2x^2/2} \in \mathbb{R}$.

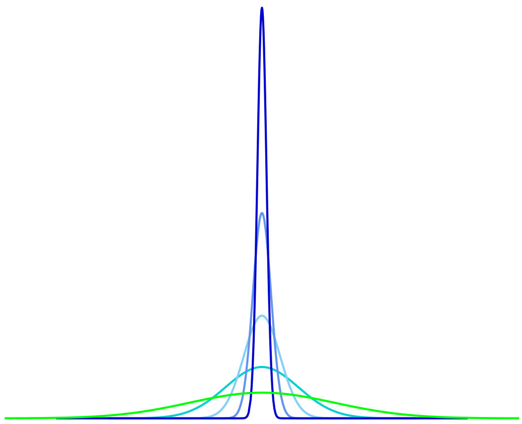
Lemme 7.5 *Chaque gaussienne G_a est une fonction positive d'intégrale* 1.

La masse de la gaussienne se concentre vers l'origine lorsque $a \to +\infty$: pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{a\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} G_a(x)\, d\lambda(x) = 0\,.$$

Preuve Par définition, on a $G_a(x) = a\,G_1(ax)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction G_1 est positive d'intégrale 1, il en va donc de même des G_a.
Un changement de variable et le théorème de convergence dominée assurent que, pour tout $\delta > 0$, on a pour chaque suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers ∞ :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} G_{a_n}(x)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq a_n\delta} G_1(x)\,d\lambda(x) = 0\,. \qquad \square$$



Les graphes de G_a pour quelques valeurs de a.

La famille (G_a) constitue une approximation de l'unité : pour a grand, l'application $f \in \mathcal{S} \mapsto G_a * f \in \mathcal{S}$ est pratiquement l'application identité. L'énoncé précis est le suivant.

Proposition 7.6 Approximation de l'unité *Soit $f \in \mathcal{S}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $a_n \to +\infty$.*

Alors, la suite des convolées $(f * G_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f lorsque $n \to \infty$.

Au point $x \in \mathbb{R}$, la convolée $(G_a * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,G_a(x-y)\,d\lambda(y)$ est définie comme la moyenne des valeurs $f(y)$ lorsque y décrit $\mathbb{R}$, pondérée par le poids $G_a(x-y)$. Lorsque $a \to +\infty$, la masse de G_a est concentrée vers l'origine. Les contributions dans cette moyenne des valeurs $f(y)$ lorsque y est loin de x auront alors peu d'importance. Tandis que, lorsque y est proche de x, $f(y)$ est pratiquement égal à $f(x)$ par continuité de f. La preuve ci-dessous quantifie ce raisonnement qualitatif.

Preuve Soit $a > 0$. Puisque la fonction G_a est d'intégrale 1, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ les égalités

$$\begin{aligned} f(x) - (G_a * f)(x) &= f(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,G_a(y)\;d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(f(x) - f(x-y)\big)\,G_a(y)\;d\lambda(y)\,, \end{aligned}$$

de sorte que l'inégalité triangulaire donne, pour tout $\delta > 0$, la majoration

$$\begin{aligned} |f(x) - (G_a * f)(x)| \leq & \int_{|y|\leq\delta} \big|f(x) - f(x-y)\big|\,G_a(y)\;d\lambda(y) \\ & + \int_{|y|>\delta} \big|f(x) - f(x-y)\big|\,G_a(y)\;d\lambda(y)\,. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Puisque les fonctions $f, f' \in \mathcal{S}$ sont bornées, on introduit $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_1 = \|f'\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, et notons $\delta = \varepsilon/M_1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $|y| \leq \delta$, la majoration $|f(x) - f(x-y)| \leq M_1\delta = \varepsilon$ de sorte que (puisque G_a est d'intégrale 1) le premier terme du membre de droite dans (7.1) est majoré par ε.

Pour cette valeur de $\delta = \varepsilon/M_1$, le lemme 7.5 assure maintenant l'existence d'un réel $A > 0$ tel qu'on ait, pour tout $a \geq A$, la majoration

$$\int_{|y|\geq\delta} G_a(y)\, d\lambda(y) \leq \varepsilon/(2M_0)\,.$$

Lorsque $a \geq A$, le second terme du membre de droite dans (7.1) est alors également majoré par ε (pour tout $x \in \mathbb{R}$), de sorte que

$$\|f - G_a * f\|_\infty \leq 2\,\varepsilon\,. \qquad \square$$

C L'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur est ainsi nommée car elle décrit l'évolution de la température $u(x,t)$ au point x d'une barre infinie et homogène, en fonction du temps t.

Donnons-nous une condition initiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de sorte que $f(x)$ soit, pour chaque point $x \in \mathbb{R}$, la température au point x à l'instant 0. On laisse alors évoluer le système pendant le temps T, sans apport extérieur, et on désigne par $u(x,t)$ la température au point $x \in \mathbb{R}$ et à l'instant $0 < t < T$.

Nous supposerons, pour simplifier, que la donnée initiale f appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$. On s'intéresse alors aux fonctions $u : [0,T[\to \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions :

La fonction $u : \mathbb{R} \times [0,T[\, \to \mathbb{R}$ est continue,
avec $u(x,0) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (7.2)

La fonction $u : \mathbb{R} \times]0,T[\, \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 (ou même C^∞) (7.3)

et elle y est solution de l'équation de la chaleur $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (7.4)

L'objectif de ce chapitre est de comprendre comment l'utilisation de la transformée de Fourier permet de montrer l'existence d'une fonction $u : [0,T[\to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions (7.2), (7.3) et (7.4), et d'obtenir une expression explicite de cette solution en fonction de la donnée initiale $f \in \mathcal{S}$.

C.1 Heuristique

Soient $f \in \mathcal{S}$ et u une fonction satisfaisant les propriétés (7.2) et (7.3). Une fois n'est pas coutume, nous allons nous permettre dans ce paragraphe d'effectuer des manipulations sur u sans les justifier... profitons-en 😄!

Les “définitions” et “assertions” suivantes sont donc étiquetées “étapes” pour insister sur le fait que nous ne vérifions pas que les objets considérés sont bien définis, et que nous ne démontrons pas vraiment nos assertions.

Nous avons vu que la transformée de Fourier transforme un opérateur de dérivation en un opérateur de multiplication (proposition 6.11). Cela nous amène à introduire la fonction suivante, qui est la “transformée de Fourier partielle” de u par rapport à la variable d'espace x.

Etape 7.7 *Pour chaque instant $t \in [0, T[$, on introduit la transformée de Fourier de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto u(x,t) \in \mathbb{C}$, définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par*

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-ix\xi} \, d\lambda(x) . \tag{7.5}$$

Pour que la fonction $\xi \mapsto \hat{u}(\xi, t)$ soit bien définie, il faudrait savoir que la fonction $x \mapsto u(x,t)$ est intégrable. Admettons de plus (tant qu'on y est ☺) que l'on puisse dériver sous le signe intégrale dans l'expression (7.5).

Etape 7.8 *La fonction $\hat{u}$ vérifie, pour tous $(\xi, t) \in \mathbb{R} \times [0, T[$:*

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) \, \mathrm{e}^{-\xi^2 t/2} .$$

Semblant de preuve Puisque u est solution de l'équation de la chaleur on obtient, après avoir dérivé sous le signe intégrale dans (7.5),

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \, e^{-ix\xi} \, d\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \, e^{-ix\xi} \, d\lambda(x) .$$

Dans cette dernière expression, on reconnaît la transformée de Fourier de la dérivée seconde d'une fonction (ici t est fixé). Puisque la transformée de Fourier échange dérivation et multiplication (de nouveau, on affirme ceci sans vérifier que les hypothèses sont satisfaites) on obtient, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, l'égalité

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -\frac{\xi^2}{2} \, \hat{u}(\xi, t) .$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, que l'on sait résoudre. Il existe donc une constante c_ξ pour laquelle

$$\hat{u}(\xi, t) = c_\xi \, e^{-\xi^2 t/2}$$

pour tout $t \in]0, T[$. On a supposé que $u(\cdot, 0) = f$, de sorte que $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Le résultat suit. ◇

Etape 7.9 *On a, pour tous $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$:*

$$u(x,t) = (f * E_t)(x) ,$$

où $E_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \, e^{-x^2/(2t)}$.

Semblant de preuve Observons que l'on a défini $E_t = G_{1/\sqrt{t}}$. Rappelons que $\hat{E}_t : \xi \mapsto \mathrm{e}^{-\xi^2 t^2/2}$ (voir l'exercice 6.15).

Le résultat de l'étape précédente s'écrit donc $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)\ \hat{E}_t(\xi)$ pour tous $0 < t < T$ et $\xi \in \mathbb{R}$

Fixons désormais $0 < t < T$. Les fonctions f et E_t appartenant à $\mathcal{S}$, il suit de la proposition 7.3 l'égalité $\mathcal{F}(f * E_t) = \hat{f}\ \hat{E}_t$.

Si l'injectivité de la transformée de Fourier s'applique (attention, on ne sait pas que l'application $x \mapsto u(x, t)$ appartient à $\mathcal{S}$), on en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'égalité cherchée

$$u(x, t) = (f * E_t)(x)\,. \qquad \diamond$$

C.2 Solution explicite pour l'équation de la chaleur

Il reste à démontrer que l'expression obtenue dans le paragraphe précédent, par des procédés qui semblent raisonnables mais qui n'ont pas été justifiés, fournit effectivement une solution au problème.

Autrement dit, il faut montrer que l'expression

$$\begin{aligned} &u(x, t) = (f * E_t)(x) \quad \text{lorsque } 0 < t < T \\ &u(x, 0) = f(x) \end{aligned}$$

définit une fonction u sur le produit $\mathbb{R} \times [0, T[$, qui vérifie les propriétés (7.2), (7.3) et (7.4). Ce n'est pas difficile, mais nous nous contenterons de donner quelques points de repère sans rentrer dans le détails des estimations.

• Chaque fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$, pour $0 < t < T$, est bien définie et elle appartient à l'espace de Schwarz (convolée de deux fonctions f et E_t appartenant à $\mathcal{S}$.)

• On montre ensuite, en utilisant bien sûr les théorèmes sur les intégrales dépendant d'un paramètre, que la restriction de u à l'ouvert $\mathbb{R} \times]0, T[$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 (voire même de tous ordres) continues, et que ces dérivées s'obtiennent en dérivant sous l'intégrale l'expression

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\ e^{-(x-y)^2/(2t)}\, d\lambda(y)\,.$$

Il nous faut, pour pouvoir appliquer les théorèmes 4.29 et 4.34, avoir dominé les intégrands. Pour cela on commencera par montrer que, pour une fonction polynômiale $(z, s) \mapsto g(z, s)$, le produit $g(z, 1/t)e^{-z^2/(2t)}$ est borné dans tout domaine $\mathbb{R} \times [\varepsilon, T]$ où $\varepsilon > 0$.

• Une fois $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ exprimés sous forme intégrale, on constate facilement que u est bien solution de l'équation de la chaleur.

• Le fait que u soit continue "jusqu'au bord", c'est-à-dire sur le produit $\mathbb{R} \times [0, T[$, avec valeur au bord $u(\cdot, 0) = f$ est conséquence de la proposition 7.6. □

8. Les espaces L^p

A L'espace L^1

Nous avons déjà remarqué à plusieurs reprises que, lorsqu'il s'agit d'intégrer, on peut remplacer une fonction intégrable par une autre fonction qui lui est égale presque partout.

Nous allons formaliser cette remarque en introduisant l'espace "quotient" L^1, qui remplacera avantageusement l'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des propositions 3.6 et 4.20. Il exprime que l'application $f \in \mathcal{L}^1 \to \int |f|\, d\lambda \in [0, \infty[$ est presque une norme sur $\mathcal{L}^1$. La seule chose qui lui manque pour être vraiment une norme est d'être "définie", au sens où l'on voudrait que $\int |f|\, d\lambda = 0$ (si et) seulement si $f = 0$ en chaque point. En effet :

Lemme 8.1 *Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable.*

L'application $\tilde{n} : f \in \mathcal{L}^1(B) \mapsto \int_B |f|\, d\lambda \in [0, \infty[$ vérifie les propriétés suivantes :

- **positivité :** *pour $f \in \mathcal{L}^1(B)$, on a $\tilde{n}(f) \geq 0$ et $\tilde{n}(f) = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p. ;*
- **inégalité triangulaire :** *pour $f, g \in \mathcal{L}^1(B)$, on a $\tilde{n}(f+g) \leq \tilde{n}(f) + \tilde{n}(g)$;*
- **homogénéité :** *pour $f \in \mathcal{L}^1(B)$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $\tilde{n}(tf) = |t|\, \tilde{n}(f)$.*

Pour construire un espace vectoriel normé à partir de l'espace $(\mathcal{L}^1(B), \tilde{n})$, on va simplement identifier deux fonctions intégrables $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(B)$ dès lors qu'elles sont égales p.p. Dans ce cas, on a les égalités $\int_B |f_1 - f_2|\, d\lambda = 0$, et $\int_B f_1\, d\lambda = \int_B f_2\, d\lambda$.

Définition 8.2 L'espace $L^1(B)$.
Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable. Pour une fonction intégrable $f \in \mathcal{L}^1(B)$, on note $[f]$ la classe des fonctions intégrables associées à f, c'est-à-dire

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^1(B) \mid g = f \text{ p.p.}\} \subset \mathcal{L}^1(B)\,.$$

L'espace $L^1(B)$ est alors défini comme l'ensemble des classes de fonctions intégrables, soit

$$L^1(B) = \{[f] \mid f \in \mathcal{L}^1(B)\}\,.$$

La fonction $f \in \mathcal{L}^1(B)$ est un représentant de la classe $[f]$. Les autres représentants de la classe $[f]$ sont les fonctions $g \in \mathcal{L}^1(B)$ telles que $g = f$ p.p.

Remarque 8.3 En termes mathématiques, l'espace $L^1(B)$ est obtenu comme l'espace quotient de $\mathcal{L}^1(B)$ par la relation d'équivalence définie par

$$f \sim g \text{ si et seulement si } f = g \text{ p.p.}$$

Si cette notion d'espace quotient vous inquiète, pensez simplement qu'on considère comme "égales" deux fonctions dès lors qu'elles sont égales hors d'un ensemble négligeable.

Exemple 8.4 On l'égalité $[\mathbb{1}_{[a,b]}] = [\mathbb{1}_{]a,b[}]$ dans $L^1(\mathbb{R})$ pour tous réels $a \leq b$.

La fonction indicatrice des rationnels, soit $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, est un représentant de la classe nulle dans $L^1(\mathbb{R})$, i.e. $[f] = [0]$ (car $f = 0$ p.p.).

Exercice 8.5 On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dense lorsque tout réel est limite d'une suite d'éléments de A. Par exemple, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $N \subset \mathbb{R}$ une partie négligeable.
   (a) Montrer que N ne contient aucun intervalle non réduit à un point.
   (b) En déduire que $A := \mathbb{R} \setminus N$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$ une fonction continue et intégrable. Montrer que la classe $[f]$ admet un unique représentant continu, à savoir f.

Proposition 8.6 L'espace vectoriel normé $L^1(B)$. *Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ mesurable.*

1. *L'espace $L^1(B)$ est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel complexe.*
2. *Pour $[f] \in L^1(B)$, on sait définir son intégrale par*

$$\int_B [f]\, d\lambda := \int_B f\, d\lambda \in \mathbb{C},$$

   où $f \in \mathcal{L}^1(B)$ est n'importe quelle fonction dans la classe $[f]$.
3. *L'application $n : [f] \in L^1(B) \mapsto \int_B [\,|f|\,]\, d\lambda \in [0, \infty[$ est bien définie et vérifie les propriétés suivantes :*

   positive et définie : *pour $[f] \in L^1(B)$ on a $n([f]) \geq 0$, avec égalité $n([f]) = 0$ si et seulement si $[f] = 0$;*

   inégalité triangulaire : *pour $[f], [g] \in L^1(B)$, on a l'inégalité $n([f] + [g]) \leq n([f]) + n([g])$;*

   homogénéité : *pour $[f] \in L^1(B)$ et $t \in \mathbb{C}$, on a $n([tf]) = |t|\, n([f])$.*

   En d'autres termes, n est maintenant une norme sur $L^1(B)$.

Preuve 1. Si $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p., on a encore $af_1+bg_1 = af_2+bg_2$ p.p. pour tout couple de complexes (a, b). On définit donc $a[f]+b[g] \in L^1(B)$ comme la classe $[af + bg] \in L^1(B)$ de n'importe quelle fonction $af + bg \in \mathcal{L}^1(B)$ avec $f \in [f]$ et $g \in [g]$.
2. Si les fonctions intégrables f_1 et f_2 sont égales p.p., leurs intégrales sont égales. L'intégrale de $[f]$ est donc bien définie comme la valeur *commune* des intégrales de $f \in \mathcal{L}^1(B)$, pour $f \in [f]$.
3. Conséquence du lemme 8.1 et de la définition de $L^1(B)$. □

Remarque 8.7 Nous n'avons utilisé la notation $[f]$ que pour pouvoir définir soigneusement l'espace $L^1(B)$ et prouver la proposition précédente.

Maintenant que nous avons compris de quoi il s'agit, nous nous affranchirons de cette notation et désignerons simplement par $f \in L^1$ la classe $[f] \in L^1(B)$, tout en étant conscient que la fonction f n'est alors définie qu'à un ensemble négligeable près. On se permettra néanmoins de parler de la "fonction" $f \in L^1(B)$.

Remarque 8.8 Lorsque B est négligeable, l'espace $L^1(B)$ ne contient que la fonction nulle : ce n'est pas passionnant !

Notation 8.9 *On désignera désormais par*

$$\|f\|_1 := \int_B |f| \, d\lambda$$

la norme d'une (classe de) fonction(s) $f \in L^1(B)$.

Une des propriétés fondamentales de l'espace vectoriel normé $L^1(B)$ est qu'il est complet. Rappelons la définition d'un espace métrique complet. Cette notion ne nous intéressera ici que pour un espace vectoriel normé.

Définition 8.10 Espaces complets.

Soi (E, d) *un espace métrique. On dit que cet espace est complet lorsque toute suite de Cauchy d'éléments de* E *converge (dans* E*).*

En particulier, si $(E, \| \, \|)$ *est un espace vectoriel normé, il est muni de la distance associée définie par* $d(f, g) = \|f - g\|$. *On dit que l'espace vectoriel normé* $(E, \| \, \|)$ *est complet (ou encore est un espace de Banach) lorsque l'espace métrique associé* (E, d) *est complet.*

La proposition suivante fournit un critère bien utile pour vérifier qu'un espace vectoriel normé est complet. Attention, ce critère n'a de sens que dans un espace vectoriel normé.

Proposition 8.11 Critère des séries normalement convergentes.

Soit $(E, \| \, \|)$ *un espace vectoriel normé. On suppose que toute série de* E *normalement convergente est convergente.*

Cette hypothèse signifie que, si l'on a une suite (f_n) d'éléments de E telle que la série des normes converge, soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge dans E – autrement dit, il existe un élément $S \in E$ tel que les sommes partielles de la série convergent vers S :

$$\|\sum_{k=0}^{n} f_k - S\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Alors, E est complet.

Ebauche de preuve Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. On veut montrer qu'elle converge. Il suffit pour cela (puisqu'elle est de Cauchy) de montrer qu'elle admet une sous-suite convergente.

Quitte à extraire une suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on désigne encore par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette sous-suite), on peut supposer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = u_0$ et $f_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$ vérifie l'hypothèse $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| < \infty$.

Par hypothèse, la série normalement convergente $\sum f_n$ est convergente, de limite $S \in E$. On a donc $u_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \xrightarrow[n\to\infty]{} S$. □

Théorème 8.12 Théorème de Riesz-Fischer : complétude de L^1.
Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ mesurable. L'espace vectoriel normé $(L^1(B), \|\ \|_1)$ est complet.

Preuve D'après le critère de la proposition 8.11, il suffit de montrer que toute série normalement convergente dans $L^1(B)$ est convergente.
Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n \in L^1(B)$. On suppose que $\sum \|f_n\|_1 < \infty$.

On introduit les sommes partielles $s_n := \sum_{k=0}^{n} f_k$. On cherche à utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^1(B)$ vers une certaine fonction f (à construire), c'est-à-dire que

$$\|s_n - f\|_1 := \int |s_n - f|\, d\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Le corollaire 2.14 sur les séries de fonctions mesurables positives assure que la série de fonctions positives $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|$ converge simplement vers une fonction $g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ dont l'intégrale vaut

$$\|g\|_1 = \int g\, d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n|\, d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < \infty\,.$$

La fonction g est donc intégrable. En particulier g est finie presque partout (proposition 4.20), c'est-à-dire en dehors d'un ensemble négligeable N.

Cela signifie que, pour tout $x \notin N$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$. Lorsque $x \notin N$, la série de nombres réels $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente ; on note $f(x)$ sa limite.

La fonction limite f n'est définie que presque partout (hors de N), mais elle fournit un élément de $L^1(B)$ puisque $|f| \leq g$ hors de N.

On constate qu'on a la domination $|s_n - f| \leq \sum_{n+1}^{\infty} |f_k| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où g est notre fonction intégrable. Ceci permet d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(s_n - f)$ pour conclure que

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\|_1 = 0\,,$$

ce qu'on voulait. $\square$

Remarque 8.13 Deux fonctions $f, g \in L^1$ sont proches, c'est-à-dire que $\|f - g\|_1$ est petit, lorsque f et g sont proches en moyenne. La différence $f(t) - g(t)$ peut être très grande en certains points, mais elle ne peut pas être grande sur une trop grosse partie (i.e. sur une partie A dont la "mesure" $\int \mathbb{1}_A d\lambda$ est trop grande).

B Les espaces L^p, pour $1 \leq p \leq \infty$

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable. Pour chaque réel $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace vectoriel $\mathcal{L}^p(B)$ des fonctions mesurables $f : B \to \mathbb{R}$ de puissance p-ième intégrale, c'est-à-dire telles que $\int |f|^p \,d\lambda < \infty$, puis son quotient $L^p(B)$ par le sous-espace des fonctions mesurables nulles p.p. L'application

$$f \in L^p(B) \to \|f\|_p := \Big(\int |f|^p \,d\lambda\Big)^{1/p} \in [0, \infty[$$

est alors une norme sur $L^p(B)$. Le fait que $p \geq 1$ joue ici un rôle crucial.

On définit aussi l'espace vectoriel $\mathcal{L}^\infty$ des fonctions mesurables qui sont "essentiellement bornées" :

$$f \in \mathcal{L}^\infty \text{ si et seulement si il existe } M \geq 0 \text{ tel que } |f| \leq M \text{ p.p.}$$

et son quotient L^∞ par le sous-espace des fonctions mesurables nulles p.p. L'application "sup essentiel" définie par

$$f \in L^\infty \mapsto \|f\|_\infty := \inf\{M \geq 0 \,|\, |f| \leq M \text{ p.p.}\} \in [0, \infty[$$

est une norme sur L^∞.

Tous ces espaces L^p pour $1 \leq p \leq \infty$ sont des espaces vectoriels normés complets.

Comme nous le verrons dans l'appendice **??** l'espace L^2 a un statut particulier : il s'agit d'un espace hilbertien (c'est le seul espace L^p qui ait cette propriété, i.e. dont la norme provienne d'un produit scalaire).

Proposition 8.14 Inégalité de Hölder.

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ deux exposants conjugués, c'est-à-dire tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, pour toutes fonctions $f \in L^p$ et $g \in L^q$, le produit $fg \in L^1$ est intégrable et on a l'inégalité

$$\left| \int fg \, d\lambda \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

Noter que $(2, 2)$ est un couple d'exposants conjugués.

Lorsque $(p, q) = (2, 2)$, on parle plutôt d'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir de nouveau l'appendice **??**).

9. Construction de l'intégrale de Lebesgue

Dans ce dernier chapitre, nous prouvons enfin le théorème 2.4. Il s'agit de construire l'intégrale des fonctions mesurables positives, et de démontrer qu'elle satisfait le théorème de convergence monotone.

Cela va nous demander quelques efforts. Nous allons donc commencer par expliquer comment les choses vont se passer, puis nous passerons à la construction à proprement parler.

Ce chapitre est fondamental pour la construction et la compréhension de l'intégrale de Lebesgue. Les étudiants qui envisagent de continuer plus tard en mathématiques, notamment dans des M2 où il sera question de Probabilités, ne pourront pas s'en passer.

Néanmoins, pour ce qui concerne l'année de LDD3, on peut considérer qu'il est hors programme.

A Intégration via une mesure

Soit X un ensemble. C'est la donnée d'une structure d'espace mesuré $(X, \mathcal{T}, m)$ sur X, c'est-à-dire d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure m sur cette tribu, qui permettent de définir une théorie de l'intégration sur X.

Les notions de tribu et de mesure seront introduites dans ce cadre général au paragraphe B.

Dans l'idée de rester les plus concrets possible, nous ne construirons la théorie de l'intégration associée que lorsque l'espace mesuré $(X, \mathcal{T}, m)$ est la droite réelle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ munie de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue (ou bien l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni de la tribu de ses parties, et de la mesure de comptage). Cela dit, la construction serait la même, à la virgule près, dans le cadre général.

Commençons par motiver la définition de la mesure de Lebesgue.
Lors de la construction de l'intégrale de Riemann, nous avons commencé par définir l'intégrale de la fonction indicatrice d'un intervalle (borné), égale à la longueur ℓ de cet intervalle (ou, plus exactement, au produit $\ell \times 1$). On a ensuite prolongé l'intégrale de Riemann "par linéarité" aux fonctions en escaliers, puis "par continuité" aux fonctions réglées.

On souhaiterait savoir intégrer bien plus de fonctions que les fonctions réglées.

Commençons par envisager les fonctions indicatrices de parties (bornées) $A \subset \mathbb{R}$. Si l'on sait définir la "longueur" de A, notée $\lambda(A)$, on aura envie de définir l'intégrale de sa fonction indicatrice par $\int \mathbb{1}_A = \lambda(A) \times 1 = \lambda(A)$.

Malheureusement, il n'est pas possible de définir de façon cohérente la "longueur" de toutes les parties de $\mathbb{R}$, de telle sorte que la longueur de tout intervalle $[a, b]$ soit ce que l'on attend – à savoir égale à $b - a$. Ce résultat négatif est dû à Vitali en 1905. Pour savoir précisément ce que l'on entend par "cohérent", se reporter à la définition des mesures 9.10. Cependant, pas de panique : pour construire une partie $A \subset \mathbb{R}$ à laquelle on ne sait pas affecter une longueur (on dira alors qu'elle n'est pas mesurable, ou pas borélienne), il faudra se donner beaucoup de mal – et utiliser l'axiome du choix ! Autant dire que ce ne seront pas des exemples très tangibles et, qu'en pratique, toutes les parties de $\mathbb{R}$ que nous serons amenés à rencontrer seront mesurables.

Nous allons donc en un premier temps définir les parties boréliennes de $\mathbb{R}$, ainsi que la mesure de Lebesgue (paragraphe B) dont l'existence sera admise.

Une fois définie la mesure de Lebesgue sur les parties mesurables (ou boréliennes) de $\mathbb{R}$, on dispose de l'intégrale de Lebesgue des fonctions indicatrices de parties mesurables.

On définit alors (paragraphe C) l'intégrale de Lebesgue des fonctions étagées qui sont les combinaisons linéaires positives de fonctions indicatrices de parties mesurables, puis l'intégrale de Lebesgue des fonctions mesurables positives par approximation (paragraphe D).

B Mesures et tribus

Nous commençons par introduire le vocabulaire des tribus et des mesures dans un cadre général. Nous présentons alors l'exemple fondamental qui nous intéressera par la suite : la droite réelle $\mathbb{R}$, munie de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de toutes les parties d'en ensemble X.

Définition 9.1 Tribu, parties mesurables.

Soit X un ensemble. Une tribu sur X est une famille $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de parties de X vérifiant les axiomes suivants :

1. l'ensemble vide appartient à $\mathcal{T}$: $\emptyset \in \mathcal{T}$;

2. $\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire : si $A \in \mathcal{T}$ alors ${}^cA \in \mathcal{T}$;

3. $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable : si $A_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Les parties $A \in \mathcal{T}$ sont les parties mesurables de X (pour cette tribu).

Remarque 9.2 Il suit que X lui-même appartient à $\mathcal{T}$, et que $\mathcal{T}$ est stable par intersection dénombrables puisque le complémentaire d'une intersection égale la réunion des complémentaires :

$$^c\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^cA_n\,.$$

Une tribu est a fortiori stable par union et intersection finies !

Définition 9.3 Espace mesurable.
Un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ est un ensemble X muni d'une tribu $\mathcal{T}$.

Commençons par deux exemples un petit peu caricaturaux (néanmoins, il faut savoir que l'on munira bien souvent $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, ou bien un ensemble fini, de la tribu discrète !)

Exemple 9.4
1. La tribu grossière sur X, définie par $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.
2. La tribu discrète, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, pour laquelle toutes les parties de X sont mesurables.

Passons à une notion plus intéressante qui sera à la base de la construction de la tribu borélienne, celle que nous utiliserons sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 9.5 Tribu engendrée.
Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X. Il existe une plus petite tribu $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ contenant $\mathcal{F}$. C'est la tribu engendrée par $\mathcal{F}$.

Preuve Considérons la famille $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ de toutes les tribus de X contenant $\mathcal{F}$, i.e. avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(X)$. Il en existe, par exemple la tribu discrète. Considérons alors $\mathcal{T} := \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(X)$. On vérifie que $\mathcal{T}$ est bien une tribu.

Par construction, $\mathcal{T}$ contient $\mathcal{F}$ et c'est la plus petite tribu de X ayant cette propriété. □

Définition 9.6 Exemple fondamental : la tribu borélienne.
Soit $X = \mathbb{R}$, ou bien $X = \mathbb{R}^n$ (ou bien n'importe quel espace métrique). La tribu borélienne sur X est la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de X. On notera cette tribu $\mathcal{B}(X)$.

Lorsque $X = \mathbb{R}$, la tribu borélienne est aussi la tribu sur $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts.

Lorsque $X = \mathbb{R}^n$, la tribu borélienne est aussi la tribu sur $\mathbb{R}^n$ engendrée par les pavés $\prod_{i=1}^n]a_i; b_i[$.

Les parties mesurables pour la tribu borélienne sont appelés boréliens.

Remarque 9.7 On voudra être capable d'intégrer des fonctions continues. La continuité est reliée à la notion d'ouvert. Il est donc raisonnable d'imposer que les ouverts soient des parties mesurables. On considère donc la plus petite tribu qui contienne tous les ouverts.

Exemple 9.8 On travaille dans $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne.
Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un borélien.
Tout fermé de $\mathbb{R}$ est borélien.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est un borélien (comme réunion dénombrable de singletons qui sont fermés) ; il n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Revenons à un ensemble quelconque X. Comme leur nom l'indique, les parties "mesurables" sont faites pour être mesurées !

Notation 9.9 *On désignera par le symbole $\sqcup$ une union disjointe.*

Définition 9.10 Espace mesuré, mesure.
Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(X, \mathcal{T})$ est une application $m : \mathcal{T} \to [0, +\infty]$ vérifiant les axiomes suivants :

1. *la partie vide est de mesure nulle, soit $m(\emptyset) = 0$*
2. *la mesure est σ-additive : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de parties mesurables de X qui sont deux à deux disjointes, alors*

$$m(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)\,.$$

La donnée $(X, \mathcal{T}, m)$ d'un espace X muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une mesure m sur cette tribu est un espace mesuré.

Remarque 9.11 Si on pense que la mesure m permet de définir la longueur (dans $\mathbb{R}$), la surface (dans $\mathbb{R}^2$)... voire le "poids" d'une partie $A \subset X$, il est bien naturel d'imposer les deux axiomes de cette définition. On ne se limite pas aux unions finies (que ce soit dans la définition des tribus ou des mesures) pour avoir par la suite de bons théorèmes de convergence !

Ne pas oublier la condition que les parties soient deux à deux disjointes dans la condition 2. Sinon, on a simplement une inégalité (voir la proposition 9.14).

La mesure d'une partie peut être égale à $+\infty$.

Rappelons la convention $a + \infty = +\infty$ pour tout $a \in [0, +\infty]$ (voir 2.1).

Définition 9.12 *Une mesure sur X est finie lorsque $m(X) \in [0, +\infty[$.*
C'est une mesure de probabilités lorsque $m(X) = 1$.

Exemple 9.13 Soit X un ensemble muni de la tribu discrète. On peut penser que $X = \mathbb{N}$ ou bien $X = \mathbb{R}$.

• La mesure de comptage associe à toute partie A de X son cardinal (donc $+\infty$ lorsque la partie est infinie).

• Supposons maintenant pour simplifier que $X = \mathbb{N}$, et donnons-nous une application $p : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$. L'application définie pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$ par

$$m(A) = \sum_{n\in A} p_n$$

définit une mesure sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu discrète. C'est une mesure finie si et seulement si la série de terme général $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Lorsque la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, on retrouve la mesure de comptage.

Proposition 9.14 *1. Une mesure est finiment additive : si $A_1, \dots, A_k$ sont des parties mesurables deux à deux disjointes, on a $m(\sqcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k (A_i)$.*

2. Une mesure est croissante : si A, B sont mesurables avec $A \subset B$, on aura $m(A) \leq m(B)$.

3. Pour deux parties mesurables A et B quelconques, on a l'égalité $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$.

4. Une mesure est sous-additive : pour une suite quelconque de parties mesurables, on a l'inégalité

$$m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m(A_k)\,.$$

Preuve 1. Compléter la famille $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ en posant $A_i = \emptyset$ lorsque $i \geq k+1$, et utiliser la σ-additivité de m.

2. Ecrire $B = A \sqcup (B \setminus A)$ (union disjointe) et utiliser l'additivité de la mesure.

3. On décompose en unions disjointes $A = (A\cap B)\sqcup A'$ et $B = (A\cap B)\sqcup B'$. On a alors $A \cup B = (A \cap B) \sqcup A' \sqcup B'$, d'où $m(A \cup B) = m(A') + m(B') + m(A \cap B)$, et l'égalité annoncée en ajoutant $m(A \cap B)$ aux deux membres.

4. On pose $B_0 = A_0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = A_k \setminus (\cup_{i=0}^{k-1} A_i)$ de sorte que les (B_k) sont des parties mesurables de X deux à deux disjointes vérifiant $B_k \subset A_k$ et $\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. On conclut avec la croissance de la mesure et la σ-additivité. $\square$

Remarque 9.15 Attention à ne pas écrire en général $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, qui n'a pas de sens dans le cas où $A \cap B$ est de mesure infinie ($\infty - \infty$ est indéterminé !).

On passe maintenant à un résultat élémentaire, mais fondamental, puisqu'il contient en germe les théorèmes de convergence monotone 9.35 et de convergence dominée 4.25.

Théorème 9.16 *On travaille dans un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, m)$.*

1. **Petit théorème de convergence monotone.**

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties mesurables, c'est-à-dire avec $A_k \subset A_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$m(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sup_{k\in\mathbb{N}} m(A_k) = \lim_{n\to\infty} m(A_k)\,.$$

2. **Petit théorème de convergence dominée.**

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties mesurables, c'est-à-dire avec $A_{k+1} \subset A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si de plus toutes ces parties sont de mesure finie, c'est-à-dire si $m(A_0) < \infty$, alors on a

$$m(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \inf_{k\in\mathbb{N}} m(A_k) = \lim_{n\to\infty} m(A_k)\,.$$

Remarque 9.17 • Dans 1., la suite (A_k) est croissante donc la suite $(m(A_k))$ des mesures est croissante et converge vers $\sup m(A_k) \in [0, +\infty]$.

On retrouve bien 9.16.1 comme cas particulier du théorème de convergence monotone, que l'on l'applique à la suite croissante de fonctions mesurables positives $f_k := \mathbb{1}_{A_k}$ qui converge simplement vers la fonction indicatrice $f := \mathbb{1}_{\cup_k A_k}$ de la réunion des A_k.

• Dans 2., la suite (A_k) est décroissante donc la suite $(m(A_k))$ des mesures est décroissante et converge vers $\inf m(A_k) \in [0, \infty[$.

On retrouve bien 9.16.2 comme cas particulier du théorème de convergence dominée, que l'on l'applique à la suite décroissante de fonctions mesurables positives $f_k := \mathbb{1}_{A_k}$ qui converge simplement vers la fonction indicatrice $f := \mathbb{1}_{\cap_k A_k}$ de l'intersection des A_k, en remarquant que toutes les fonctions f_k sont dominées par f_0, qui est intégrable par hypothèse puisque $m(A_0) < \infty$.

• Cela dit, nous n'avons pas le droit d'utiliser les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée pour démontrer 9.16 : ces théorèmes n'ont pas encore été démontrés, et l'intégrale de Lebesgue n'a même pas encore été construite !

• L'hypothèse $m(A_0) < \infty$ est indispensable dans le 2. de la proposition précédente. En efffet, travaillons dans $X = \mathbb{N}$ muni de la tribu discrète et de la mesure de comptage. Soit $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$. On a $m(A_k) = \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pourtant $\cap A_k = \emptyset$ est de mesure nulle.

Preuve du théorème 9.16

1. On pose $B_0 = A_0$ puis $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ lorsque $k \geq 1$. Par construction, les parties (B_k) sont mesurables, deux à deux disjointes et l'on a $A_k = \sqcup_{i=0}^k B_i$ $(k \in \mathbb{N})$ et $\cup_{k=0}^\infty A_k = \sqcup_{k=0}^\infty B_k$.

On a donc $m(A_k) = \sum_{i=0}^k m(B_i)$ $(k \in \mathbb{N})$. Puis, par σ-additivité de m :

$$m(\bigcup_{k=0}^\infty A_k) = m(\bigsqcup_{k=0}^\infty B_k) = \sum_{i=0}^\infty m(B_i) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^k m(B_i) = \lim_{k\to\infty} m(A_k)\,.$$

2. Dans la preuve qui suit, on peut penser que l'espace ambiant est non plus X, mais la partie A_0 qui est de mesure finie. Faire des dessins.

On introduit la famille de parties mesurables définie par $B_0 = A_0$ et $B_k = A_0 \setminus A_k$ pour $k \geq 1$. On a donc, pour $k \geq 1$, $m(A_0) = m(A_k) + m(B_k)$. La famille (B_k) est maintenant croissante, avec $\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k = A_0 \setminus (\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k)$. On a donc $m(A_0) = m(\cap_{k\in\mathbb{N}} A_k) + m(\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k)$ tandis que, d'après 1. :

$$m(\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \sup m(B_k) = \sup_{k\in\mathbb{N}} (m(A_0) - m(A_k)) = m(A_0) - \inf_{k\in\mathbb{N}} m(A_k)\,.$$

Le résultat s'en déduit. □

On introduit maintenant la mesure qui nous intéressera au premier chef.

Théorème 9.18 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Il existe une unique mesure λ sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne et qui vérifie, pour tout intervalle ouvert :

$$\lambda(]a,b[) = b - a\,.$$

Il s'agit d'un théorème délicat à démontrer, tant pour l'existence que pour l'unicité, et nous l'admettrons.

Exercice 9.19 Montrer qu'on a également $\lambda([a,b]) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[) = b - a$ pour tous réels $a \leq b$.

Exercice 9.20

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est invariante par translations : si $A \subset \mathbb{R}$ est un borélien et $t \in \mathbb{R}$, on a $\lambda(A + t) = \lambda(A)$.

   On pourra fixer $t \in \mathbb{R}$, et montrer que l'application

   $$m_t : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto \lambda(A + t) \in [0, +\infty]$$

   est une mesure sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ qui vérifie $m_t((]a,b[) = b - a$ pour tous $a < b$.
2. Montrer de même l'égalité $\lambda(-A) = \lambda(A)$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$, où l'on note $-A = \{-a \mid a \in A\}$.
3. Soit $s \in \mathbb{R}$. Montrer également que $\lambda(sA) = |s|\,\lambda(A)$ pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}$ où $sA = \{sa \mid a \in A\}$.

Remarque 9.21 Nous disposons donc maintenant de la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On peut se demander si on ne s'est pas compliqué la vie pour rien : pourquoi avoir introduit la notion de tribu, et en particulier pourquoi se limiter à la tribu borélienne pour définir la mesure de Lebesgue ?

Reformulons la question plus précisément : est-il possible de définir une "mesure de Lebesgue" sur la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de toutes les parties de $\mathbb{R}$? Par mesure de Lebesgue, on entend une mesure $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ définie sur la tribu de toutes les parties de $\mathbb{R}$, et qui vérifierait $m([a,b]) = b - a$ pour tout segment.

Vous vous en doutez, la réponse est non. C'est la difficulté qu'on évoquait dans le paragraphe introductif 9.A lorsqu'on disait qu'il n'est pas possible de définir de façon cohérente la "longueur" de toute partie de $\mathbb{R}$.

La production d'un contre-exemple n'est pas très difficile, mais nécessite l'utilisation de l'axiome du choix. Un contre-exemple a été donné par Vitali en 1905. Il a exhibé une partie $\mathcal{V} \subset [0,1]$ qui vérifie les inclusions

$$[0,1] \subset \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Q} \\ -1\leq r\leq 1}} \mathcal{V} + r \subset [-1,2]\,, \tag{9.1}$$

l'union étant disjointe. Si on savait définir la mesure de $\mathcal{V}$, celle-ci devrait être strictement positive (inclusion de gauche) et nulle (inclusion de droite).

On peut prendre pour $\mathcal{V}$ un ensemble de représentants des classes de $\mathbb{R}$ modulo $\mathbb{Q}$.

C Fonctions mesurables, intégrale des fonctions étagées

Dans un souci de simplification, nous nous restreignons désormais à $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de sa tribu borélienne. Cependant tout ce qui suit peut être transposé mot par mot au cadre général d'un espace mesurable quelconque $(X, \mathcal{T})$, par exemple $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ comme au chapitre 5.

Dans la suite, lorsqu'on parlera de parties mesurables de $\mathbb{R}$, il s'agira de parties mesurables pour la tribu borélienne, c'est-à-dire de boréliens.

Proposition-Définition 9.22 Fonctions mesurables.

Une fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ est dite mesurable, ou encore borélienne, si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. *l'image réciproque par f de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est mesurable ;*
2. *l'image réciproque par f de tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est mesurable ;*
3. *l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est mesurable ;*
4. *l'image réciproque par f de tout borélien de $\mathbb{R}$ est mesurable.*

Preuve $1 \Rightarrow 2$ Est immédiat.

$2 \Rightarrow 3$ Rappelons qu'un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (disjoints), soit $U = \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k$. On a donc $f^{-1}(U) = \cup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(I_k)$ mesurable comme union finie ou dénombrable de parties mesurables.

$3 \Rightarrow 4$ On considère l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ dont l'image réciproque par f est mesurable, soit

$$\mathcal{T} = \{B \subset \mathbb{R} \,|\, f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}\,.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{T}$ est une tribu. Par hypothèse, $\mathcal{T}$ contient les ouverts. Donc $\mathcal{T}$ contient la tribu engendrée par les ouverts, c'est-à-dire contient $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, ce qu'on voulait.

$4 \Rightarrow 1$ Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est borélien (exemple 9.8). $\square$

Exemple 9.23 • Une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable.

• Une fonction en escalier $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, prolongée par 0 hors de l'intervalle $[a, b]$, est mesurable.

• Une fonction monotone est mesurable.

• Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est une fonction mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire si A est mesurable.

Comme on l'a dit plus haut, nous ne nous préoccuperons en pratique pas des questions de mesurabilité. En effet, il est tellement coûteux de produire une fonction non mesurable qu'on est assurés de ne pas en rencontrer une par hasard ! On se permettra donc d'admettre notamment le résultat suivant (même s'il n'est pas difficile).

Lemme 9.24 Stabilité de la mesurabilité.

Rappelons que l'espace $\mathbb{R}$ est implicitement muni de sa tribu borélienne.

1. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables, leur somme $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et leur produit $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont mesurables.

On a également $\max(f, g)$ *et* $\min(f, g)$ *mesurables.*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ mesurable ne s'annule pas, son inverse $1/f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ est mesurable.

2. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors f est mesurable.

On a vu qu'il peut être utile de savoir intégrer des fonctions à valeurs complexes, notamment lorsqu'on parle de séries de Fourier (voir le chapitre **??**).

Proposition-Définition 9.25 Fonctions complexes mesurables.

Une fonction $f = u + iv : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si ses parties réelles $u = \mathrm{Re}\,(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et imaginaire $v = \mathrm{Im}\,(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont mesurables.

Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont mesurables, les fonctions $f + g$, fg et $|f|$ sont mesurables.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est mesurable, il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, telle que $|h(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et telle que $f = h\,|f|$.

Preuve Pour la dernière assertion, on procède comme suit. Puisque f est mesurable, l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est mesurable. Il suffit de poser $h(x) = 1$ si $x \in A$ et $h(x) = f(x)/|f(x)|$ sinon. $\square$

On est parfois amenés à manipuler des fonctions à valeurs dans $[0,+\infty]$ ou $[-\infty,+\infty]$ (qui apparaissent notamment comme limites de suites non bornées de fonctions à valeurs réelles, voir le paragraphe D par exemple).

Définition 9.26 Demi-droite achevée.

La demi-droite achevée est $[0,+\infty]$*, muni de la relation d'ordre qui prolonge celle de* $[0,\infty[$ *et telle que* $x < +\infty$ *pour tout* $x \in [0,\infty[$.

Ses intervalles ouverts sont les intervalles ouverts de $]0,\infty[$ *ainsi que* $[0,+\infty]$, $]x,\infty]$ *et* $[0,x[$ *pour* $x \in \mathbb{R}$*. On définit de même les intervalles fermés, et les intervalles quelconques de* $[0,+\infty]$.

Une suite (x_n) *de* $[0,+\infty]$ *converge vers* $z \in [0,+\infty]$ *lorsque, pour tout intervalle ouvert* $I \subset [0,+\infty]$ *contenant* z*, on a* $x_n \in I$ *lorsque* n *est assez grand.*

Une fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to [0,+\infty]$ *est mesurable si l'image réciproque par* f *de tout intervalle (ou bien de tout intervalle ouvert) de* $[0,+\infty]$ *est mesurable.*

On a bien sûr des définitions (et des résultats) semblables dans $[-\infty,+\infty]$.

Propriété 9.27 *Une partie non vide de* $[0,+\infty]$ *admet une borne supérieure et une borne inférieure qui sont respectivement son plus petit majorant et son plus grand minorant (dans* $[0,+\infty]$*).*

Le lemme 9.24 se généralise comme suit.

Lemme 9.28 Stabilité de la mesurabilité (bis).

1. Si $f, g : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ *sont deux fonctions mesurables, on a également* $\max(f,g) : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ *et* $\min(f,g) : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ *mesurables.*

2. Soit $f_n : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ *une suite de fonctions mesurables. On suppose que la suite* (f_n) *converge simplement vers une fonction* $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$*. Alors* f *est mesurable.*

3. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions mesurables. Alors* $\sup f_n : \mathbb{R} \to]-\infty,+\infty] \subset [-\infty,+\infty]$ *est mesurable.*

Exemple 9.29 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f_n(x) = x^n$ si $x \geq 0$. Ces fonctions sont continues donc mesurables.

La fonction $f := \lim_{n\to+\infty} f_n : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$, $f(1) = 1$ et $f(x) = +\infty$ lorsque $x > 1$. Elle est mesurable.

D Intégrale des fonctions positives

On commence par définir l'intégrale, pour la mesure de Lebesgue λ, d'une fonction étagée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Les fonctions étagées sont aux parties mesurables ce que les fonctions en escalier positives sont aux intervalles.

On définira ensuite l'intégrale des fonctions mesurables positives.

Définition 9.30 Fonction étagée.

Une fonction positive $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est étagée si elle est mesurable et si elle prend un nombre fini de valeurs.

Dans ce cas, si $c_1, \cdots, c_k$ sont les valeurs distinctes prises par f, on a l'égalité $f = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}$ où les $A_i := f^{-1}(c_i)$ sont mesurables.

Rappelons que λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Définition 9.31 Intégrale de Lebesgue d'une fonction étagée.

Soit $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ une fonction étagée, et $c_1, \cdots, c_k \in [0, +\infty]$ les valeurs distinctes prises par f de sorte que $f = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}$ où $A_i := f^{-1}(c_i)$. On définit alors (avec la convention 2.1) l'intégrale de Lebesgue de f comme

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \sum_{i=1}^k c_i \, \lambda(A_i) \in [0, +\infty] \, .$$

On peut, dans l'écriture de f ou le calcul de son intégrale, se permettre d'omettre la valeur nulle lorsqu'elle est prise par f.

Proposition 9.32 *Soient $d_1, \cdots, d_\ell$ des réels positifs ou nuls, et $B_1, \cdots, B_\ell$ des parties mesurables de $\mathbb{R}$. La fonction $\sum_{j=1}^\ell d_j \mathbb{1}_{B_j}$ est étagée et son intégrale vaut*

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^\ell d_j \mathbb{1}_{B_j} \, d\lambda = \sum_{j=1}^\ell d_j \, \lambda(B_j) \, .$$

Preuve La petite nuance par rapport à la définition 9.31 vient de ce que l'écriture $f = \sum_{j=1}^\ell d_j \mathbb{1}_{B_j}$ n'est pas forcément l'écriture "canonique" $f = \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{A_i}$ – avec $A_i := f^{-1}(c_i)$ – qui intervient dans cette définition. (On rencontre une difficulté semblable lors de la définition de l'intégrale d'une fonction en escalier).

Premier cas : Les ensembles (B_j) sont deux à deux disjoints. Dans ce cas les réels d_j sont les valeurs prises par f (mais les d_j ne sont plus forcément distincts) et on a donc pour tout $i = 1, \cdots, k$

$$A_i = \bigsqcup_{\substack{1 \le j \le \ell \\ d_j = c_i}} B_j \, .$$

Ainsi on obtient par additivité de la mesure :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda &= \sum_{i=1}^{k} c_i\,\lambda(A_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i\,\Big(\sum_{\substack{1\le j\le \ell\\ d_j=c_i}} \lambda(B_j)\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{\substack{1\le j\le \ell\\ d_j=c_i}} d_j\,\lambda(B_j)\Big) = \sum_{j=1}^{\ell} d_j\,\lambda(B_j)\,.\end{aligned}$$

Second cas : Les ensembles (B_j) sont quelconques. Pour simplifier l'écriture, on se contente d'écrire la preuve lorsque $f = d_1\mathbb{1}_{B_1} + d_2\mathbb{1}_{B_2}$, le cas général étant similaire.

On décompose $B_1 = B_1' \sqcup (B_1\cap B_2)$ et $B_2 = B_2' \sqcup (B_1\cap B_2)$, et l'on obtient la décomposition canonique de f, soit $f = d_1\mathbb{1}_{B_1'} + d_2\mathbb{1}_{B_1'} + (d_1+d_2)\mathbb{1}_{B_1\cap B_2}$. Il vient alors par définition de l'intégrale de f, puis en regroupant :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda &= d_1\lambda(B_1') + d_2\lambda(B_2') + (d_1+d_2)\,\lambda(B_1\cap B_2)\\ &= d_1\,(\lambda(B_1') + \lambda(B_1\cap B_2)) + d_2(\lambda(B_2') + \lambda(B_1\cap B_2))\\ &= d_1\lambda(B_1) + d_2\lambda(B_2)\,.\end{aligned}$$

□

Corollaire 9.33 Propriétés de l'intégrale des fonctions étagées.

1. *L'intégrale des fonctions étagées est croissante : si $f \le g$ sont deux fonctions étagées, on a $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda \le \int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda$.*
2. *L'intégrale des fonctions étagées est "positivement linéaire" : si $f, g : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ sont étagées et si $\alpha, \beta \ge 0$ sont deux réels positifs, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g)\,d\lambda = \alpha\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda + \beta\int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda\,.$$

Preuve C'est une conséquence de la proposition 9.32. Pour pouvoir l'utiliser, on commence par écrire simultanément les fonctions étagées f et g comme combinaisons linéaires d'une même famille de fonctions indicatrices.

On écrit les fonctions étagées f et g sous forme normalisée (voir la définition 9.30) $f = \sum_{i=1}^{k} a_i\mathbb{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{\ell} b_i\mathbb{1}_{B_i}$, où les (a_i) sont les valeurs distinctes (éventuellement nulles) prises par f et les (b_j) sont les valeurs distinctes (éventuellement nulles) prises par g, de sorte que les $A_i := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a_i\}$ sont des parties mesurables qui constituent une partition de $\mathbb{R}$, de même pour les B_j.

Les parties $(A_i \cap B_j)_{1\le i\le k, 1\le j\le \ell}$ sont donc deux à deux disjointes (peut-être vides pour certaines d'entre elles), et leur réunion est $\mathbb{R}$. Sur $A_i \cap B_j$, f et g sont toutes deux constantes, respectivement égales à a_i et b_j, de sorte que

$$f = \sum_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le \ell}} a_i\,\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}\,,\quad g = \sum_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le \ell}} b_j\,\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}\,. \tag{9.2}$$

1. Supposons $f \leq g$. Si $A_i \cap B_j$ est non vide, la condition $f \leq g$ impose que $a_i \leq b_j$. Il suit de (9.2) que

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = \sum_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} a_i\,\lambda(A_i\cap B_j) \leq \sum_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} b_j\,\lambda(A_i\cap B_j) = \int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda\,.$$

2. Pour deux réels positifs $\alpha, \beta \geq 0$ on a d'après (9.2)

$$\alpha f + \beta g = \sum_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} (\alpha a_i + \beta b_j)\,\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}$$

donc, par 9.32 et en regroupant les termes :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g)\,d\lambda &= \alpha\Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} a_i\lambda(A_i\cap B_j)\Big) + \beta\Big(\sum_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq \ell}} b_j\lambda(A_i\cap B_j)\Big)\\ &= \alpha\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda + \beta\int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda\,.\end{aligned}$$

□

Passons à l'intégrale d'une fonction mesurable à valeurs positives (ou à valeurs dans $[0,+\infty]$).

Définition 9.34 Intégrale d'une fonction mesurable positive.
Soit $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ une fonction mesurable positive.
On définit l'intégrale de f au sens de Lebesgue par

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda := \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}} h\,d\lambda \mid \textit{où } h : \mathbb{R}\to[0,+\infty] \textit{ est étagée telle que } 0\leq h\leq f\Big\} \in [0,+\infty]\,.$$

Il suit immédiatement de la définition que l'intégrale des fonctions mesurables positives est croissante : en effet, si $f \leq g$, toute fonction $h \leq f$ vérifie également $h \leq g$. Cette propriété sera néanmoins rappelée en 9.37. Nous l'utiliserons ci-dessous dans la preuve du théorème de convergence monotone.

Théorème 9.35 Théorème de convergence monotone (Beppo Levi).
Soit $f_n : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ une suite croissante de fonctions mesurables positives : $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On définit $f := \lim_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\to+\infty} f_n$. Alors $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ est mesurable positive et

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda\,.$$

Il s'agit d'une inversion de limite et d'intégrale. La conclusion du théorème est en effet que (sous les hypothèses ci-dessus)

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \, .$$

Preuve Puisque la suite (f_n) est croissante, la monotonie de l'intégrale des fonctions mesurables positives (proposition 9.37) assure que la suite des intégrales $(I_n := \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $J := \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$, donc converge vers un réel (étendu) $I := \sup I_n \in [0, J] \subset [0, +\infty]$.

Pour obtenir le théorème, il nous reste à montrer l'inégalité $J \leq I$. Il va falloir revenir à la définition de l'intégrale de f via les fonctions étagées (définition 9.34).

Soit donc $h = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbb{1}_{A_i}$ une fonction étagée telle que $h \leq f$. On va montrer l'inégalité $\int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda \leq I$. En revenant à la définition de $J := \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$, c'est-à-dire en passant au sup sur les fonctions étagées h majorées par f, on obtiendra que $J \leq I$. Ceci terminera la démonstration.

Notre fonction étagée h vérifie $h \leq f$. On veut se donner un peu de marge . On choisit donc une constante $0 < c < 1$, de sorte que $c\,h(x) < f(x)$ lorsque $f(x) \neq 0$. On introduit alors, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid c\,h(x) \leq f_n(x)\} \, .$$

C'est une suite croissante $B_n \subset B_{n+1}$ de parties mesurables de $\mathbb{R}$. Et l'on a $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ (d'où l'intérêt de la constante $c < 1$!)

Chacune des fonctions $h \, \mathbb{1}_{B_n} = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \mathbb{1}_{A_i \cap B_n}$ est étagée, d'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h \, \mathbb{1}_{B_n} \, d\lambda = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \lambda(A_i \cap B_n)$. Pour $i = 1, \cdots, k$, la suite de parties $(A_i \cap B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_i \cap B_n) = A_i \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = A_i$. Le petit théorème de convergence monotone 9.16 assure donc la convergence $\int_{\mathbb{R}} h \, \mathbb{1}_{B_n} \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda$ lorsque $n \to \infty$.

L'intégrale des fonctions étagées est positivement homogène et croissante. On obtient donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c \int_{\mathbb{R}} h \, \mathbb{1}_{B_n} \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} c\, h \, \mathbb{1}_{B_n} \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathbb{1}_{B_n} \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = I_n \leq I \, .$$

En faisant tendre n vers ∞, il vient donc

$$c \int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda \leq I \, .$$

Ceci étant vrai pour tout $c < 1$, il vient finalement que $\int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda \leq I$. Comme expliqué plus haut, ceci termine la démonstration. □

Avant de passer aux propriétés de l'intégrale des fonctions mesurables positives, observons que toute fonction de ce type peut s'obtenir comme limite croissante d'une suite de fonctions étagées. On peut même rendre cette construction explicite.

Lemme 9.36 Fonction mesurable positive comme limite croissante de fonctions étagées.

Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. La suite (f_n) de fonctions étagées définies par

$$f_n(x) = 2^n \text{ si } f(x) \geq 2^n \quad \text{et} \quad f_n(x) = \tfrac{p}{2^n} \text{ si } \tfrac{p}{2^n} \leq f(x) < \tfrac{p+1}{2^n} \leq 2^n\,.$$

converge en croissant vers f.

Preuve Immédiate. □

Proposition 9.37 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives.

1. *L'intégrale des fonctions mesurables positives est croissante : si $f, g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ sont deux fonctions mesurables positives telles que $f \leq g$, alors $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda$.*
2. *L'intégrale des fonctions mesurables positives est positivement linéaire.*
3. *Lorsque f est étagée, on retrouve l'intégrale définie précédemment.*

Preuve 1. Si $f \leq g$, toute fonction étagée telle que $h \leq f$ vérifie a fortiori $h \leq g$.

2. Soient f, g deux fonctions mesurables positives. On les approche respectivement par deux suites croissantes (f_n) et (g_n) de fonctions étagées, par exemple en utilisant le lemme 9.36.

Soient $\alpha, \beta \geq 0$ deux réels. La suite de fonctions étagées $(\alpha f_n + \beta g_n)$ converge en croissant vers $\alpha f + \beta g$. Le théorème de convergence monotone et la proposition 9.33 (l'intégrale des fonctions étagées est positivement linéaire) donnent alors le résultat voulu puisque :

$$\begin{aligned}\int (\alpha f + \beta g)\, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int (\alpha f_n + \beta g_n)\, d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big(\alpha \int f_n\, d\lambda + \beta \int g_n\, d\lambda\Big) = \alpha \int f\, d\lambda + \beta \int g\, d\lambda\,.\end{aligned}$$

3. Pour h étagée avec $h \leq f$, on a en effet $\int_{\mathbb{R}} h\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$ avec égalité si l'on choisit $h = f$. □

Exercice 9.38 Invariance de l'intégrale : symétrie, translation, homothétie. Soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}^*$, les égalités

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)\ d\lambda(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(-t)\ d\lambda(t) \\ \int_{\mathbb{R}} f(t)\ d\lambda(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\ d\lambda(t) \\ \int_{\mathbb{R}} f(t)\ d\lambda(t) &= |s| \int_{\mathbb{R}} f(st)\ d\lambda(t)\,.\end{aligned}$$

On commencera par traiter le cas des fonctions étagées en utilisant l'exercice 9.20.

E Séries et intégrales

Dans cette section, nous évoquons rapidement le lien entre la théorie des séries numériques, et la théorie de l'intégration.

Nous nous intéressons à la théorie de l'intégration sur l'ensemble $X = \mathbb{N}$ des entiers naturels, muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de toutes ses parties et de la mesure de comptage $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, +\infty]$ définie pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$ par $\mu(A) = \mathrm{card}\,(A)$.

Une fonction $u : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ n'est autre qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, +\infty]$. Puisque la tribu considérée sur $\mathbb{N}$ est la tribu de toutes ses parties, toute fonction $u : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ (ou $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$) est mesurable.

La démarche suivie dans le paragraphe D dans le cadre de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ nous permet de définir l'intégrale pour la mesure de comptage μ des fonctions étagées $u : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ (c'est-à-dire des fonctions $u : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ qui prennent un nombre fini de valeurs), puis de passer à l'intégrale $\int_{\mathbb{N}} u\, d\mu \in [0, +\infty]$ d'une fonction positive $u : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$.

Lemme 9.39 *Soit* $u : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ *une fonction étagée. Alors*

$$\int_{\mathbb{N}} u\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} u(n)\,. \tag{9.3}$$

Preuve Soient $a_1, \cdots, a_k \in [0, +\infty]$ les valeurs distinctes prises par u, et $A_j := \{n \in \mathbb{N} \,|\, u(n) = a_j\}$ pour $1 \leq j \leq k$. On a, par construction,

$$\int_{\mathbb{N}} u\, d\mu = \sum_{j=1}^{k} a_j\, \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{k} a_j\, \mathrm{card}(A_j)\,.$$

Lorsque u prend une infinité de fois une valeur non nulle, les deux membres de l'égalité (9.3) valent $+\infty$.

Si la fonction u est nulle sauf en un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} u(n)$ est une somme portant sur un nombre fini de termes, et on a bien l'égalité (9.3). □

Corollaire 9.40 *Soit* $u : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ *une fonction positive. Alors*

$$\int_{\mathbb{N}} u\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} u(n)\,. \tag{9.4}$$

Preuve On introduit, pour chaque entier $p \in \mathbb{N}$, la fonction tronquée $v_p : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ définie par $v_p(n) = u(n)$ lorsque $n \leq p$ et $v_p(n) = 0$ sinon. Par construction, chaque fonction $v_p : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ est étagée, et la suite (v_p) converge en croissant vers u. Le résultat annoncé découle donc du théorème de convergence monotone, et de l'égalité 9.3 appliquée à chaque fonction v_p. □

On obtient alors, en revenant à la définition d'une fonction intégrable, et de l'intégrale d'une telle fonction, le corollaire suivant.

Corollaire 9.41 *Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors u est intégrable pour la mesure de comptage si et seulement si la série de terme général (u_n) est sommable (ou absolument convergente), c'est-à-dire si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$. Dans ce cas, on a l'égalité*

$$\int_{\mathbb{N}} u\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} u(n)\,. \tag{9.5}$$

Maintenant que nous avons défini l'intégrale de Lebesgue sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, voyons comment s'expriment les grands théorèmes de la théorie de l'intégration dans ce contexte.

• Dans le chapitre 5, on a énoncé les théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les résultats correspondants dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, ou bien dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sont également vrais. Enonçons l'un d'entre eux.

Proposition 9.42 Fubini-Tonelli dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
Soit $u : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ (mesurable) positive. On note $u_n(t) = u(n,t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On a alors l'égalité

$$\int_{\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{R}} u_n(t)\; d\lambda(t) \Big)\, d\mu(n) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{N}} u_n(t)\, d\mu(n) \Big)\; d\lambda(t)\,. \tag{9.6}$$

En d'autres termes, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\int_{\mathbb{R}} u_n(t)\; d\lambda(t) \Big) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(t) \Big)\; d\lambda(t)\,. \tag{9.7}$$

L'égalité (9.7) n'est autre que le corollaire 2.14 sur l'intégrale des séries de fonctions positives ! On laisse au lecteur le soin d'énoncer, et d'interpréter en termes de séries de fonctions (resp. de séries doubles), le théorème de Fubini dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, ainsi que les deux théorèmes de Fubini dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

• De même, les théorèmes de continuité et de dérivabilité "sous le signe $\int$", que l'on avait énoncés dans $\mathbb{R}$, ont des analogues sur $\mathbb{N}$ qui s'interprètent en des théorèmes de continuité et de dérivabilité "sous le signe $\sum$".

Index